شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 50

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۵۰

مترجم: محمدمسعود هاشمی

ویراستار: اسرا رضافدایی

حروف‌چین: علی باقری کوچکسرائی

نسخه‌ی ۱.۰ تابستان ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۵۰

هماهنگ‌ها[۱]

۱.۵۰ طنین‌های موسیقیایی[۲]

گفته شده فیثاغورس[۳] این واقعیت را کشف کرده‌است که دو تار مشابه تحت کشش یکسان که فقط در طول متفاوت باشند، هنگامی که با هم تولید صدا کنند اثری ایجاد می‌کنند که اگر طول تارها به نسبت دو عدد صحیح کوچک باشد به گوش خوشایند است. اگر نسبت طول‌ها به‌صورت یک به دو باشد، آنها متناظر با اکتاو[۴] در موسیقی هستند. اگر نسبت‌ها به‌صورت دو به سه باشد، متناظر با فاصله‌ی[۵] بین C و G[۶] هستند که یک‌پنجم نامیده می‌شود. این فاصله‌ها عموماً به‌عنوان آکوردهای[۷] صوتی «خوشایند» پذیرفته‌شده‌اند.

فیثاغورس آن‌چنان تحت تأثیر این کشف قرار گرفت که آن را اساس مکتبی قرار داد که فیثاغورسیان نامیده می‌شوند، و عقاید عرفانی راجع به توانمندی‌های بزرگ اعداد دارند. اعتقاد بر این بود که چیزی مشابه آن در مورد سیارات یا «کرات» یافته می‌شود. ما گاهی اوقات اصطلاحِ «موسیقی کرات» را می‌شنویم. ایده این بود که روابط عددی بین مدارهای سیارات یا بین چیزهای دیگری در طبیعت وجود دارد. مردم معمولاً فکر می‌کنند که یونانیان نوعی خرافات داشته‌اند. اما آیا این با علایق علمی خود ما به روابط کمّی تفاوت چندانی دارد؟ کشف فیثاغورس اولین مثال، غیر از هندسه، از هر رابطه‌ی عددی در طبیعت بود. باید بسیار تعجب‌آور بوده باشد که به طور ناگهانی کشف شود واقعیتی از طبیعت وجود دارد که شامل رابطه‌ی عددی ساده‌ای است. اندازه‌گیری‌های ساده‌ی طول‌ها درباره‌ی چیزهایی پیش‌بینی می‌کند که ارتباط آشکاری

[1] Harmonics
[2] Musical tones
[3] Pythagoras
[۴] octave (هنگام، هشتمین طنین کامل بالا یا پایین طنینی معین ــ مترجم ــ)
[5] interval
[۶] نت‌های C و G
[۷] chords (آمیزه‌ای از چند نت موسیقیایی که همزمان اجرا می‌شوند ــ مترجم ــ)

با هندسه ندارد؛ تولید صداهای خوشایند. این کشف منجر به این تعمیم شد که شاید یک ابزار خوب برای درک طبیعت، حساب[۸] و تجزیه‌وتحلیل ریاضی باشد. نتایج حاصل از دانش جدید این دیدگاه را توجیه می‌کند.

فیثاغورس فقط می‌توانسته با مشاهده‌ی تجربی کشف خود را انجام داده باشد. با این حال، به‌نظر نمی‌رسد این جنبه‌ی مهم، او را تحت تاثیر قرار داده باشد. اگر این‌طور بود، ممکن بود فیزیک آغاز بسیار زودتری داشته‌باشد (نگاه به آنچه در گذشته شخص دیگری انجام داده و تصمیم‌گیری در مورد آنچه که او باید انجام می‌داده، همیشه آسان است!).

ممکن است جنبه‌ی سوم این کشف بسیار جالب را ملاحظه نماییم: اینکه این کشف به دو نت[۹] که به گوش خوشایند به‌نظر می‌رسند مربوط می‌شود. ممکن است بپرسیم آیا ما در درک اینکه چرا تنها صداهای معینی برای گوش ما خوشایند هستند از فیثاغورس بهتریم؟ احتمالاً در حال حاضر نظریه‌ی عمومی زیبایی‌شناسی[۱۰] نسبت به زمان فیثاغورس پیشرفت بیشتری نداشته‌است. در همین یک کشف یونانیان، سه جنبه وجود دارد: آزمایش، روابط ریاضی و زیبایی‌شناسی. فیزیک تنها در دو بخش اول پیشرفت زیادی داشته‌است. این فصل با درک کنونی ما از کشف فیثاغورس سروکار خواهد داشت.

در بین صداهایی که ما می‌شنویم، یک نوع هست که نوفه[۱۱] می‌نامیم. نوفه متناظر با نوعی ارتعاش نامنظم پرده‌ی گوش است که با ارتعاش نامنظم شیئی نزدیک تولید شده‌است. اگر ما نموداری برای نشان دادن فشار هوا روی پرده‌ی گوش (و بنابراین، جابه‌جایی این پرده) به‌صورت تابعی از زمان ترسیم کنیم، نموداری که متناظر با نوفه است ممکن است مانند شکل ۱.۵۰ (الف) باشد (چنین نوفه‌ای ممکن است تقریباً با صدای کوبیدن پا[۱۲] مطابقت داشته باشد). صدای موسیقی مشخصه‌ی متفاوتی دارد. موسیقی با حضور طنین‌های کمابیش ممتد[۱۳]، یا «نت‌های» موسیقیایی، مشخص می‌شود (ابزار موسیقی ممکن است نوفه نیز ایجاد کنند!). طنین ممکن است برای مدت زمان نسبتاً کوتاه ادامه داشته‌باشد، مانند زمانی که یک کلید بر روی پیانو فشرده شود، یا ممکن است تقریباً به طور نامحدود ممتد باشد، مانند زمانی که یک نوازنده‌ی فلوت یک نت طولانی را نگه دارد.

ویژگی خاص نت موسیقیایی از دیدگاه فشار در هوا چیست؟ تفاوت نت موسیقیایی با نوفه در این است که دوره‌ی تناوب[۱۴] در نمودار آن وجود دارد. نوعی شکل ناهموار در تغییرات فشار هوا با زمان وجود دارد و این شکل خودش را مکرراً تکرار می‌کند. نمونه‌ای از یک تابع فشار زمان که متناظر با یک نت موسیقیایی است در شکل ۱.۵۰ (ب) نشان داده شده‌است.

---

[8] arithmetic

[۹] note (در دو معنی بکار می‌رود: یکی به معنی واحد صدائی با فرکانس ثابت که نامی بر آن گذاشته شده. دیگری به معنی نمایش یا نشانه نوشتاری هر یک از این صداها؛ نت‌ها را با اصطلاحات «A, B, C, D, E, F, G» عنوان می‌کنند.ــ مترجمــ)

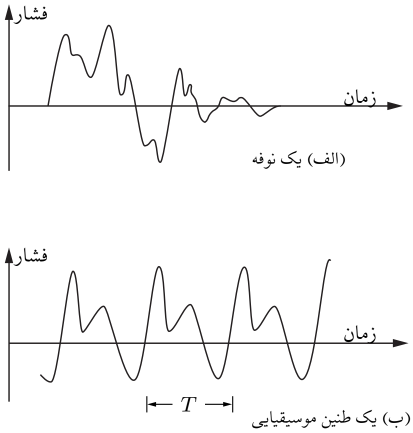
[10] aesthetics

[11] noise

[12] stamped foot

[13] sustained

[14] periodicity



۱.۵۰. فشار به‌صورت تابعی از زمان برای (الف) نوفه، و (ب) طنین موسیقیایی.

نوازندگان معمولاً از طنین موسیقی برحسب سه ویژگی صحبت می‌کنند: بلندی[15]، ارتفاع[16] و «کیفیت». دریافته‌اند که «بلندی» متناظر با بزرگی تغییرات فشار است. ارتفاع متناظر با دوره‌ی زمانی برای یک تکرار تابع فشار پایه است (نت‌های « کوتاه» دوره‌های طولانی‌تری از نت‌های «بلند» دارند). «کیفیت» طنین باید به تفاوت‌هایی که ممکن است باز هم بتوانیم بین نت‌های با بلندی و ارتفاع یکسان بشنویم مربوط باشد. صداهای ابوا[17]، ویولن[18]، و یا یک سوپرانو[19] حتی زمانی که نت‌هایی با ارتفاع یکسان ایجاد کنند باز هم قابل تشخیص هستند. کیفیت به ساختار الگوی تکرارشونده مربوط می‌شود.

بیایید برای یک لحظه، صدای تولید شده توسط یک تار درحال ارتعاش را در نظر بگیریم. اگر تار را با کشیدن به یک طرف و رها کردن آن به صدا در آوریم، حرکت بعدی با حرکات امواجی که ما تولید کرده‌ایم تعیین خواهد شد. می‌دانیم که این امواج در هر دو جهت حرکت کرده، و در دو سر تار بازتابیده خواهند شد. آن‌ها برای یک مدت طولانی به جلو و عقب خواهند رفت. مهم نیست که موج چقدر پیچیده است، به هر حال خودش را تکرار می‌کند. دوره‌ی تکرار دقیقاً زمان T مورد نیاز موج برای پیمودن دو طول کامل تار است. زیرا این دقیقاً زمان مورد نیاز برای هر موج است، از زمانی که آغاز شده، از هر دو سر تار بازتابیده شده و به مکان شروعش بازگشته در جهت اولیه در حال پیشروی است. این زمان برای امواجی که در هر دو جهت شروع می‌شوند یکسان است. پس از یک دوره، هر نقطه بر روی تار به موقعیت شروعش باز می‌گردد، و دوباره دوره‌ی بعدی و غیره. موج صوتی تولید شده نیز باید تکرار یکسانی داشته باشد. می‌بینیم که چرا یک تار به صدا در آورده شده تولید طنین موسیقیایی می‌کند.

---

[15]loudness
[16]pitch
[17]oboe
[18]violin
[19]soprano

۲.۵۰ سری فوریه[20]

در فصل قبل راه دیگر نگاه کردن به حرکت یک دستگاه[21] در حال ارتعاش را مورد بحث قرار دادیم. ملاحظه کردیم که یک تار مدهای طبیعی[22] مختلف نوسان دارد، و هر نوع خاصی از ارتعاش را که ممکن است با شرایط شروع آغاز شود می‌توان ــ با نسبت‌های مناسب ــ به‌عنوان ترکیبی از چندین مد طبیعی که با هم نوسان می‌کنند در نظر گرفت. برای یک تار درمی‌یابیم که مدهای طبیعی[23] نوسان، بسامدهای ω_0، $2\omega_0$، $3\omega_0$ و... را دارند. بنابراین، عمومی‌ترین حرکت یک تارِ به صدا در آورده شده از مجموع نوسانات سینوسی در بسامد پایه[24] ω_0 ترکیب شده، دیگری در بسامد هماهنگ دوم $2\omega_0$، دیگری در بسامد هماهنگ سوم $3\omega_0$ و غیره. اکنون مد پایه خودش را در هر دوره $T_1 = 2\pi/\omega_0$ تکرار می‌کند. هماهنگ دوم خودش را در هر دوره $T_2 = 2\pi/2\omega_0$ تکرار می‌کند. این هماهنگ همچنین خودش را در هر دوره $T_1 = 2T_2$ بعد از دو دوره‌اش، تکرار می‌کند. به‌طور مشابه، مد هماهنگ سوم خودش را بعد از زمان T_1 که ۳ برابر دوره‌اش می‌باشد تکرار می‌کند. دوباره می‌بینیم که چرا یک تار به صدا در آورده شده کل الگوی خود را با دوره‌ی تناوب T_1 تکرار می‌کند. تار به صدا در آورده شده تولید طنین موسیقیایی می‌کند.

ما در مورد حرکت تار صحبت کرده‌ایم. اما صدا که حرکت هوا است، توسط حرکت تار تولید می‌شود، پس ارتعاشات آن نیز باید از همان هماهنگ‌ها تشکیل شده باشد؛ هر چند ما دیگر در مورد مدهای طبیعی هوا فکر نمی‌کنیم. همچنین، شدت نسبی هماهنگ‌ها ممکن است در هوا نسبت به تار متفاوت باشد، به‌ویژه اگر تار از طریق یک برد صوتی[25] با هوا «جفت‌شده» باشد. بازده جفت‌شدگی[26] با هوا برای هماهنگ‌های مختلف متفاوت است.

اگر فشار هوا به‌عنوان تابعی از زمان برای طنین موسیقیایی را با $f(t)$ نشان دهیم (مانند آنچه در شکل ۱.۵۰ (ب) نشان داده شده)، آنگاه انتظار داریم که $f(t)$ را بتوان به‌صورت مجموع تعدادی از توابع هماهنگ ساده‌ی زمان ــ مانند $\cos\omega t$ ــ برای هر یک از بسامدهای هماهنگ مختلف نوشت. اگر دوره‌ی ارتعاش T باشد، بسامد زاویه‌ای پایه $\omega = 2\pi/T$ خواهد بود، و هماهنگ‌ها 2ω، 3ω و غیره خواهند بود.

یک پیچیدگی اندک وجود دارد. برای هر بسامد ممکن است انتظار داشته‌باشیم که فازهای شروع[27] لزوماً برای همه‌ی بسامدها یکسان نباشند. بنابراین، باید از توابعی مانند $\cos(\omega t + \phi)$ استفاده نماییم. با این حال به‌جای آن، استفاده از هر دو توابع سینوسی و کسینوسی برای هر بسامد ساده‌تر است. یادآوری

[20]The Fourier series
[21]system
[22]natural modes
[23]normal modes
[24]بسامد پایه را هماهنگ اول می‌خوانند. هماهنگ‌های دیگر مضرب صحیحی از بسامد پایه هستندــ مترجمــ
[25]sounding board
[26]efficiency of the coupling
[27]starting phases

می‌کنیم که

$$\cos(\omega t + \phi) = (\cos\phi\cos\omega t - \sin\phi\sin\omega t) \tag{۱.۵۰}$$

چون ϕ ثابت است، هر نوسان سینوسی در بسامد ω را می‌توان به‌صورت مجموع جمله‌ای با $\cos\omega t$ و جمله‌ی دیگری با $\sin\omega t$ نوشت.

پس نتیجه می‌گیریم که هر تابع $f(t)$ را که با دوره‌ی T، تناوبی است می‌توان به‌صورت ریاضی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(t) = a_0 & \\ &+ a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \\ &+ a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t \\ &+ a_3 \cos 3\omega t + b_3 \sin 3\omega t \\ &+ \cdots \qquad + \cdots \end{aligned} \tag{۲.۵۰}$$

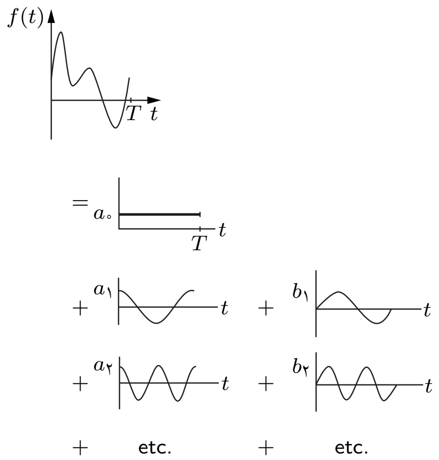
در اینجا $\omega = 2\pi/T$ و a ها و b ها ثابت‌های عددی هستند که به ما می‌گویند چه مقدار از هر مؤلفه‌ی نوسان در تابع $f(t)$ نوسان حضور دارد. ما جمله‌ی «بسامد صفر» a_0 را اضافه کرده‌ایم به‌طوری که فرمول ما کاملاً عمومی خواهد بود، اگرچه این جمله برای طنین موسیقیایی معمولاً صفر است. این کمیت جابه‌جایی مقدار متوسط (تراز «صفر») فشار صدا را نشان می‌دهد. با این کمیت فرمول ما می‌تواند پاسخگوی هر حالتی باشد. معادله‌ی (۲.۵۰) به‌صورت نموداری در شکل ۲.۵۰ نشان داده شده است (دامنه‌های a_n و b_n توابع هماهنگ باید به‌طور مناسبی انتخاب شوند. آنها به‌صورت نموداری و بدون هیچ گونه مقیاس خاصی در شکل نشان داده شده‌اند). سری (۲.۵۰)، سری فوریه برای $f(t)$ نامیده می‌شود.

ما گفتیم که هر تابع تناوبی را می‌توان به این روش ساخت. باید این گفته را اصلاح کنیم و بگوییم که هر موج صوتی، یا هر تابعی که معمولاً در فیزیک با آن روبه‌رو می‌شویم، را می‌توان از چنین مجموعی ساخت. ریاضیدانان می‌توانند توابعی را اختراع کنند که نمی‌توانند از توابع هماهنگ ساده ساخته شوند؛ به‌عنوان مثال، تابعی که «پیچ‌خوردگی وارون[۲۸]» دارد به‌طوری که برای بعضی از مقادیر t دو مقدار دارد! نیازی نیست در اینجا نگران چنین توابعی باشیم.

۳.۵۰ کیفیت و هم‌خوانی[۲۹]

اکنون ما قادر به توصیف این هستیم که چه چیزی «کیفیت» طنین موسیقیایی را تعیین می‌کند. این همان مقادیر نسبی هماهنگ‌های مختلف است، مقادیر a ها و b ها. یک طنینی که فقط هماهنگ اول دارد طنین

[28] reverse twist
[29] Quality and consonance



۵۰.۲. هر تابع تناوبی $f(t)$ برابر با مجموع توابع هماهنگ ساده است.

«خالص» است. طنینی با تعداد زیادی از هماهنگ‌های قوی طنین «غنی» است. ویولن نسبت به یک ابوا تولید نسبت‌های هماهنگ متفاوت می‌کند.

اگر چند «نوسانگر» را به یک بلندگو متصل کنیم، می‌توانیم طنین‌های موسیقیایی مختلف «تولید» نماییم (نوسانگر معمولاً تابعِ هماهنگ ساده‌ی تقریباً خالص تولید می‌کند). ما باید بسامدهای نوسانگرها را ω، ۲ω، ۳ω و غیره انتخاب کنیم. سپس با تنظیم کنترل حجم صدا روی هر نوسانگر، می‌توانیم هر مقداری که می‌خواهیم هر هماهنگ را اضافه کنیم و در نتیجه طنین‌های با کیفیت‌های مختلف تولید کنیم. ارگ الکتریکی[۳۰] عمدتاً به این روش کار می‌کند. «کلیدها[۳۱]» بسامد نوسانگر پایه را انتخاب می‌کنند و «دکمه‌ها[۳۲]» سوئیچ‌هایی هستند که نسبت‌های هماهنگ‌ها را کنترل می‌کنند. با زدن این سوئیچ‌ها، ارگ می‌تواند مانند یک فلوت، ابوا و یا یک ویولن تولید صدا نماید.

جالب است که برای تولید چنین طنین‌های «مصنوعی» ما فقط نیاز به یک نوسانگر برای هر بسامد داریم و نیاز به نوسانگرهای جداگانه برای مؤلفه‌های سینوسی و کسینوسی نداریم. گوش به فازهای نسبی هماهنگ خیلی حساس نیست. گوش عمدتاً به تمام بخش‌های سینوسی و کسینوسی هر بسامد توجه می‌کند. تحلیل ما از آنچه برای توضیح جنبه‌ی ذهنی موسیقی لازم است دقیق‌تر است. پاسخ میکروفون یا ابزار فیزیکی دیگر بستگی به این فازها دارد و برای بررسی چنین مواردی ممکن است نیاز به تجزیه‌وتحلیل کامل باشد.

«کیفیتِ» صدای صحبت‌شده، صداهای حروف صدادار[۳۳] را که ما در گفتار تشخیص می‌دهیم نیز تعیین می‌کند. شکل دهان بسامدهای مدهای طبیعی ارتعاش هوا در دهان را تعیین می‌کند. بعضی از این مدها توسط امواج صوتی ناشی از تارهای صوتی به ارتعاش در می‌آیند. در این روش، دامنه‌های برخی

[30] electric organ
[31] keys
[32] stops
[۳۳] vowel sounds (در زبان انگلیسی و در اینجا: a, e, i, o و u)

از هماهنگ‌های صوتی نسبت به دیگران افزایش می‌یابد. هنگامی که شکل دهان‌مان را تغییر می‌دهیم، هماهنگ‌های بسامدهای متفاوت ارجحیت داده می‌شوند. این اثرات دلیل تفاوت بین صدای "$e-e-e$" و صدای "$a-a-a$" هستند.

همه‌ی ما می‌دانیم که صدای حرف صدادار خاص؛ مثلاً "$e-e-e$"؛ چه در ارتفاع بلند یا کوتاه صحبت کنیم (یا آواز بخوانیم) بازهم مانند همان حرف صدادار است. از سازوکاری که ما توصیف کردیم، انتظار داریم که هنگامی که ما دهان‌مان را برای "$e-e-e$" شکل می‌دهیم بسامدهای خاصی با قوت تلفظ کرده‌شوند و با تغییر ارتفاع صدایمان تغییر نکند. بنابراین رابطه‌ی هماهنگ‌های مهم با هماهنگ پایه، یعنی «کیفیت»، با تغییر ارتفاع تغییر می‌کند. ظاهراً سازوکاری که به‌وسیله‌ی آن گفتار را تشخیص می‌دهیم بر اساس روابط هماهنگ مشخصی نیستند.

اکنون در مورد کشف فیثاغورس چه باید بگوییم؟ ما می‌فهمیم که دو تار مشابه با طول‌های به نسبت ۲ به ۳، بسامدهای پایه به نسبت ۳ به ۲ خواهند داشت. اما چرا باید آنها با هم «صدای خوشایند» تولید کنند؟ شاید باید سرنخ‌مان را از بسامدهای هماهنگ‌ها بگیریم. هماهنگ دوم تار کوتاه‌تر همان بسامد هماهنگ سوم تار بلندتر را خواهد داشت (نشان دادن، یا باور کردن اینکه تار به صدا در آورده شده چند هماهنگ پایین‌تر را شدیداً تولید می‌کند آسان است).

شاید باید این قواعد را وضع کنیم؛ نت‌ها هم‌خوان[۳۴] به‌نظر می‌رسند وقتی هماهنگ‌هایی با بسامد یکسان داشته باشند. نت‌ها ناهم‌خوان[۳۵] به‌نظر می‌رسند اگر هماهنگ‌های بالایی بسامدهایی نزدیک به یکدیگر اما با فاصله‌ی کافی که زنش‌های[۳۶] سریع بین این دو وجود داشته باشد. این‌که چرا صدای زنش‌ها خوشایند به‌نظر نمی‌رسد؟ و چرا هم‌نوایی[۳۷] هماهنگ‌های بالایی خوشایند به‌نظر می‌رسد؟ چیزی است که ما نمی‌دانیم چگونه تعریف یا توصیف کنیم. ما از این دانشِ «آنچه صدای خوبی دارد» نمی‌توانیم بگوییم مثلاً چه چیزی باید بوی خوب داشته باشد. به عبارت دیگر درک ما از آن، چیزی عمومی‌تر از این بیان نیست که وقتی آنها هم‌نوا هستند صدای آنها خوب به‌نظر می‌رسد. این موضوع به ما اجازه نمی‌دهد که چیزی بیش از خواص هم‌سازی[۳۸] در موسیقی استنباط کنیم.

بررسی روابط هماهنگی[۳۹] که ما توسط برخی از آزمایش‌های ساده با پیانو توصیف کردیم آسان است. فرض کنید سه C پی‌درپی نزدیک وسط صفحه‌کلید را با C، C' و C''، و G های دقیقاً بالای آنها را با G،

[34] consonant
[35] dissonant
[36] beats
[37] unison
[38] concordance
[39] harmonic relationships

G' و G'' برچسب گذاری کنیم. پس هماهنگ‌های پایه بسامدهای نسبی زیر را خواهند داشت:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{C} - ۲ & \mathrm{G} - ۳ \\ \mathrm{C}' - ۴ & \mathrm{G}' - ۶ \\ \mathrm{C}'' - ۸ & \mathrm{G}'' - ۱۲ \end{array}$$

این روابط هماهنگی را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد: فرض کنید به‌آرامی C' را فشار دهیم، به‌طوری که تولید صدا نکند اما باعث شویم که خفه‌کن بالابرده شود. سپس اگر C را به صدا در آوریم، هماهنگ پایه و هماهنگ دومش را تولید می‌کند. هماهنگ دوم تارهای C' را به ارتعاش وامی‌دارد. اگر C را رها کنیم (با نگه داشتن C') خفه‌کن ارتعاش تارهای C را متوقف خواهد کرد، و ما می‌توانیم نت C' را در حالی که کم کم از بین می‌رود (با نرمی) بشنویم. به روشی مشابه، هماهنگ سوم C می‌تواند باعث ارتعاش G' شود. یا هماهنگ ششم C (که اکنون بسیار ضعیف شده) می‌تواند ارتعاش در بسامد پایه‌ی G'' را آغاز نماید.

اگر ما G را به آرامی فشار دهیم و سپس C' را به صدا درآوریم، نتیجه‌ای تا حدودی متفاوت به دست می‌آید. هماهنگ سوم C' متناظر با هماهنگ چهارم G خواهد بود، بنابراین فقط هماهنگ چهارم G وجود خواهد داشت. ما می‌توانیم صدای G'' را بشنویم (اگر از نزدیک گوش بدهیم)، که دو اکتاو بالاتر از G است که فشار داده بودیم! آسان است که ترکیبات متعدد بیشتری برای این بازی ابداع کنیم.

ممکن است در گذر از این قسمت ملاحظه نماییم که گام ماژور[۴۰] می‌تواند فقط با این شرط تعریف شود که سه آکورد ماژور[۴۱] $(F-A-C)$؛ $(C-E-G)$؛ و $(G-B-D)$ هرکدام توالی‌های طنین با نسبت بسامد (۴ : ۵ : ۶) را نشان می‌دهند. این نسبت‌ها، به‌علاوه‌ی این واقعیت که یک اکتاو $(C-C'$، $B-B'$ و غیره) نسبت ۱ : ۲ دارد، گام کلی را برای حالت «ایده‌آل» یا برای آنچه «آهنگین‌سازی دقیق صدا[۴۲]» نامیده می‌شود تعیین می‌کند. ابزار دارای صفحه کلید مانند پیانو معمولاً به این روش کوک نمی‌شوند، اما کمی «تغییر[۴۳]» ایجاد می‌شود تا بسامدها برای همه‌ی طنین‌های آغازین ممکن تقریباً درست شوند. برای این کوک‌کردن، که «تعدیل‌شده[۴۴]» نامیده می‌شود، این اکتاو (هنوز هم ۱ : ۲) به ۱۲ فاصله‌ی مساوی تقسیم شده که برای آن نسبت بسامد $(۲)^{۱/۱۲}$ است. بسامد پنجم دیگر دارای نسبت بسامد ۳/۲ نیست، بلکه نسبت بسامد $۲^{۷/۱۲} = ۱٫۴۹۹$ دارد، که ظاهراً برای اکثر گوش‌ها به اندازه کافی نزدیک است.

ما قانونی برای هم‌خوانی برحسب انطباق هماهنگ‌ها بیان کرده‌ایم. آیا این انطباق احتمالاً دلیل اینکه دو نت هم‌خوان هستند است؟ یک نوازنده ادعا کرده‌است که دو طنین خالص، طنین‌هایی که به‌دقت طوری تولید شده‌اند که عاری از هماهنگ‌ها باشند، وقتی هماهنگ‌های نسبی در نسبت‌های مورد انتظار یا نزدیک

[۴۰] major scale (گام بزرگ ــ احتمالاً همان اصطلاح ماژور متداول‌تر است. گام توالی چند نت است که به ترتیب ارتفاع مرتب شده‌اند و گستره صوتی‌شان جمعاً دوازده نیم‌پرده متساوی یا یک اکتاو است ــ مترجم ــ)

[41] major chords

[42] just intonation

[43] fudging

[44] tempered

به آنها قرار دارند احساس‌های هم‌خوانی یا ناهم‌خوانی ایجاد نمی‌کنند (این آزمایشات دشوار هستند زیرا به دلایلی که بعداً خواهیم دید، تولید طنین‌های خالص دشوار است). ما هنوز هم نمی‌توانیم مطمئن باشیم هنگامی که تصمیم می‌گیریم که یک صدا را دوست داشته باشیم، آیا گوش با هماهنگ‌ها منطبق می‌شود یا محاسبات انجام می‌دهد.

۴.۵۰ ضرایب فوریه[45]

اکنون به این ایده که هر نت، یعنی صدای تناوبی، را می‌توان با ترکیب مناسب هماهنگ‌ها ارائه نمود برمی‌گردیم. می‌خواهیم نشان دهیم چگونه می‌توانیم پیدا کنیم که چه مقدار از هر هماهنگ مورد نیاز است. البته اگر تمام ضرایب a و b داده شده باشند، محاسبه‌ی $f(t)$ با استفاده از معادله (۲.۵۰) آسان است. اکنون سوال این است، اگر $f(t)$ داده شده باشد چگونه می‌توانیم بدانیم که ضرایب جمله‌های گوناگون هماهنگ چه باید باشند؟ (درست کردن کیک از روی دستور خوراک‌پزی آسان است؛ اما اگر کیکی به ما داده شود می‌توانیم دستور خوراک‌پزی بنویسیم؟).

فوریه کشف کرد که این کار در واقع خیلی مشکل نیست. جمله‌ی a_0 قطعاً آسان است. ما قبلاً گفتیم که a_0 صرفاً مقدار میانگین $f(t)$ در یک دوره است (از $t=0$ تا $t=T$). ما به‌راحتی می‌توانیم ببینیم که در واقع همین‌طور است. مقدار میانگین یک تابع سینوسی یا کسینوسی در یک دوره صفر است. در دو یا سه و یا هر تعداد کل دوره نیز صفر است. بنابراین به جز a_0، مقدار میانگین تمام عبارات در سمت راست معادله (۲.۵۰) صفر است (به یاد داشته باشید که باید $\omega = 2\pi/T$ انتخاب کنیم).

حال میانگین مجموع برابر با مجموع میانگین‌هاست. بنابراین میانگین $f(t)$ دقیقاً برابر میانگین a_0 است. اما a_0 ثابت است، بنابرین میانگین آن برابر با خودش است. با یادآوری تعریف میانگین داریم:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \qquad (۳.۵۰)$$

ضرایب دیگر فقط کمی مشکل‌ترند. برای پیداکردن آنها می‌توانیم از یک ترفند کشف شده توسط فوریه استفاده کنیم. فرض کنید هر دو طرف معادله‌ی (۲.۵۰) را در تابعی هماهنگ، مثلاً $\cos 7\omega t$ ضرب کنیم.

[45]The Fourier coefficients

پس داریم:

$$\begin{aligned}
f(t)\cdot\cos 7\omega t = a_0\cdot\cos 7\omega t \\
&+ a_1\cos\ \omega t\cdot\cos 7\omega t + b_1\sin\ \omega t\cdot\cos 7\omega t \\
&+ a_2\cos 2\omega t\cdot\cos 7\omega t + b_2\sin 2\omega t\cdot\cos 7\omega t \\
&+ \cdots \qquad\qquad\qquad + \cdots \\
&+ a_7\cos 7\omega t\cdot\cos 7\omega t + b_7\sin 7\omega t\cdot\cos 7\omega t \\
&+ \cdots \qquad\qquad\qquad + \cdots
\end{aligned} \tag{۴.۵۰}$$

اکنون بیایید از هر دو طرف میانگین بگیریم. میانگین $a_0\cos 7\omega t$ در زمان T متناسب با میانگین کسینوس در ۷ دوره‌ی کامل است. اما این دقیقاً صفر است. میانگین تقریباً تمام جمله‌های باقیمانده نیز صفر است. بیایید به جمله‌ی a_1 نگاه کنیم. می‌دانیم که عموماً

$$\cos A\cos B = \tfrac{1}{2}\cos(A+B) + \tfrac{1}{2}\cos(A-B). \tag{۵.۵۰}$$

جمله‌ی a_1 می‌شود:

$$\tfrac{1}{2}a_1(\cos 8\omega t + \cos 6\omega t). \tag{۶.۵۰}$$

به این ترتیب ما دو جمله‌ی کسینوسی داریم، یکی با ۸ و دیگری با ۶ دوره‌ی کامل در T که میانگین هر دوی آنها صفر است. بنابراین میانگین جمله‌ی a_1 صفر است.

برای جمله‌ی a_2، درمی‌یابیم که میانگین $a_2\cos 9\omega t$ و $a_2\cos 5\omega t$ نیز هر دو صفر است. برای جمله‌ی a_9، $\cos 16\omega t$ و $\cos(-2\omega t)$ را پیدا می‌کنیم. اما $\cos(-2\omega t)$ همان $\cos 2\omega t$ است، بنابراین هر دوی اینها میانگین صفر دارند. روشن است که تمام جملات a به جز یکی میانگین صفر دارند. این جمله a_7 است و برای این جمله داریم:

$$\tfrac{1}{2}a_7(\cos 14\omega t + \cos 0). \tag{۷.۵۰}$$

کسینوس صفر، یک است، و البته میانگین آن هم یک است. بنابراین ما این نتیجه را داریم که میانگین همه‌ی جملات aی معادله‌ی (۴.۵۰) برابر با $\frac{1}{2}a_7$ است.

جملات b حتی ساده‌ترند. زمانی که آنها را در هر جمله‌ی کسینوسی مانند $\cos n\omega t$ ضرب کنیم می‌توانیم با همان روش نشان دهیم که همه‌ی جملات b مقدار میانگین صفر دارند.

می‌بینیم که «ترفند» فوریه مانند یک غربال عمل کرده‌است. وقتی جملات را در $\cos 7\omega t$ ضرب کرده و میانگین بگیریم، تمام جملات به جز a_7 حذف می‌شوند، و درمی‌یابیم که

$$\text{Average}\,[f(t)\cdot\cos 7\omega t] = a_7/2, \tag{۸.۵۰}$$

یا

$$a_7 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos 7\omega t\, dt. \qquad (9.50)$$

ما به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم که نشان دهد ضریب b_7 را می‌توان با ضرب معادله‌ی (۲.۵۰) در $\sin 7\omega t$ و میانگین گرفتن از هر دو طرف دست آورد. نتیجه این است:

$$b_7 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin 7\omega t\, dt. \qquad (10.50)$$

اکنون آنچه برای ۷ درست است انتظار داریم برای هر عدد صحیح درست باشد. بنابراین می‌توانیم برهان و نتیجه‌ی‌مان را در قالب ریاضی ظریف‌تر زیر خلاصه نماییم. اگر m و n اعداد صحیح غیر صفر باشند، و اگر $\omega = 2\pi/T$، پس

$$\text{I.} \quad \int_0^T \sin n\omega t\cos m\omega t\, dt = 0. \qquad (11.50)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{II.} \quad \int_0^T \cos n\omega t\cos m\omega t\, dt &= \\ \text{III.} \quad \int_0^T \sin n\omega t\sin m\omega t\, dt &= \end{aligned}\right\}\begin{cases} 0 & n \neq m \text{ if.} \\ T/2 & n = m \text{ if.}\end{cases} \qquad (12.50)$$

$$\text{IV.} \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t. \qquad (13.50)$$

$$\text{V.} \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt. \qquad (14.50)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos n\omega t\, dt. \qquad (15.50)$$

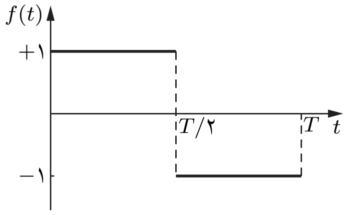
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin n\omega t\, dt. \qquad (16.50)$$

در فصل‌های قبل استفاده از نماد نمایی برای نمایش حرکت هماهنگ ساده مناسب بود. به جای $\cos\omega t$، از $Ree^{i\omega t}$، قسمت حقیقی تابع نمایی، استفاده کردیم. در این فصل از توابع کسینوسی و سینوسی استفاده کرده‌ایم زیرا مشتقات آنها شاید کمی واضح‌تر باشد. با این حال نتیجه‌ی نهایی معادله‌ی (۱۳.۵۰)، می‌تواند به‌صورت فشرده زیر نوشته شود:

$$f(t) = \text{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{a}_n e^{in\omega t}, \qquad (17.50)$$

که در آن $\hat{a}_n$ عدد مختلط $a_n - ib_n$ (با $b_0 = 0$) است. همچنین اگر بخواهیم از همان نماد در همه جا استفاده کنیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\, dt \qquad (n \geq 1). \qquad (18.50)$$



$$f(t) = \begin{cases} +۱ & ۰ < t < T/۲ \text{ for,} \\ -۱ & T/۲ < t < T \text{ for.} \end{cases}$$

۳.۵۰. تابع موج مربعی.

اکنون می‌دانیم که چگونه موج تناوبی را به مؤلفه‌های هماهنگ آن «تجزیه» کنیم. این روش آنالیز فوریه و جملات جداگانه مؤلفه‌های فوریه نامیده می‌شوند. با این حال، ما نشان نداده‌ایم که وقتی تمام مؤلفه‌های فوریه را پیدا و آنها را به هم اضافه می‌کنیم، در واقع به $f(t)$ می‌رسیم. ریاضیدانان نشان داده‌اند که برای رده‌ی گسترده‌ای از توابع، در واقع برای تمام توابع مورد علاقه‌ی فیزیکدانان، اگر بتوانیم انتگرال بگیریم به $f(t)$ می‌رسیم. یک استثناء جزئی وجود دارد. اگر تابع $f(t)$ ناپیوسته باشد، یعنی اگر به‌طور ناگهانی از یک مقدار به مقداری دیگر جهش کند، مجموع فوریه مقداری در نیمه راه نقطه‌ی انفصال بین مقادیر بالایی و پایینی در ناپیوستگی را خواهد داد. بنابراین اگر ما تابع عجیب $f(t) = ۰$، $۰ \leq t < t_۰$ را داشته باشیم، و $f(t) = ۱$، $t_۰ \leq t \leq T$، مجموع فوریه، به جز در $t_۰$ که به جای ۱ مقدار $\frac{۱}{۲}$ را می‌دهد، همه جا مقدار درست را خواهد داد. به هر حال نسبتاً غیرفیزیکی است که تاکید کنیم باید تابعی تا $t_۰$ صفر، اما دقیقاً در $t_۰$ برابر با ۱ باشد. بنابراین شاید ما باید «قاعده‌ای» را برای فیزیکدانان وضع نماییم که هر تابع ناپیوسته (که فقط می‌تواند ساده‌سازی یک تابع فیزیکی واقعی باشد) باید با مقادیر نیمه‌راهی در ناپیوستگی‌ها تعریف شود. پس هر تابع این چنینی، با هر تعداد متناهی از چنین جهش‌هایی، همچنین تمام توابع دیگری که از لحاظ فیزیکی جالب‌اند، به‌درستی توسط مجموع فوریه نشان داده می‌شوند.

به‌عنوان تمرین، پیشنهاد می‌کنیم که خواننده برای تابع نشان داده شده در شکل ۳.۵۰ سری فوریه را تعیین نماید. از آنجا که تابع نمی‌تواند به‌صورت صریح جبری نوشته شود، شما نمی‌توانید به روش معمول انتگرال‌ها را از صفر تا T محاسبه کنید. با این حال، اگر ما آنها را به دو بخش جداگانه‌ی انتگرال از صفر تا $T/۲$ (که در آن $f(t) = ۱$) و انتگرال از $T/۲$ تا T (که در آن $f(t) = -۱$)، تقسیم کنیم بسیار آسان هستند. نتیجه باید این باشد:

$$f(t) = \frac{۴}{\pi}(\sin \omega t + \tfrac{۱}{۳}\sin ۳\omega t + \tfrac{۱}{۵}\sin ۵\omega t + \cdots), \qquad (۱۹.۵۰)$$

در اینجا $\omega = ۲\pi/T$. به این ترتیب ما دریافته‌ایم که موج مربعی‌مان (با فاز خاص انتخاب شده) فقط هماهنگ‌های فرد دارد، و دامنه‌های آنها با بسامدهایشان نسبت معکوس دارند.

بیایید بررسی کنیم که معادله‌ی (۱۹.۵۰) واقعاً $f(t)$ را برای مقداری از t به ما برمی‌گرداند. $t = T/۴$

یا $\omega t = \pi/۲$ انتخاب می‌کنیم. داریم

$$f(t) = \frac{۴}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۳}\sin\frac{۳\pi}{۲} + \frac{۱}{۵}\sin\frac{۵\pi}{۲} + \cdots\right) \quad (۲۰.۵۰)$$

$$= \frac{۴}{\pi}\left(۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} \pm \cdots\right). \quad (۲۱.۵۰)$$

سری داخل پرانتز*، برابر با $\pi/۴$ است و در نتیجه $f(t) = ۱$.

۵.۵۰ قضیه‌ی انرژی[۴۶]

انرژی در موج با مجذور دامنه‌ی آن متناسب است. برای موجی با شکل پیچیده، انرژی در یک دوره متناسب با $\int_۰^T f^۲(t)dt$ خواهد بود. همچنین می‌توانیم این انرژی را به ضرایب فوریه مرتبط نماییم. می‌نویسیم:

$$\int_۰^T f^۲(t)\,dt = \int_۰^T \left[a_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin n\omega t\right]^۲ dt. \quad (۲۲.۵۰)$$

وقتی مجذور جمله‌ی داخل براکت را بسط دهیم تمام جملات ضربدری ممکن مانند $a_۵ \cos ۵\omega t \cdot b_۷ \cos ۷\omega t$ را بدست می‌آوریم. اما در بالا [در معادلات (۱۱.۵۰) و (۱۲.۵۰)] نشان داده‌ایم که انتگرال‌های تمام جملات این چنینی در یک دوره صفر است. فقط جملات مجذور مانند $a_۵^۲ \cos^۲ ۵\omega t$ باقی می‌مانند. انتگرال هر مجذور کسینوس یا مجذور سینوس در یک دوره برابر با $T/۲$ است، بنابراین داریم:

$$\int_۰^T f^۲(t)\,dt = Ta_۰^۲ + \frac{T}{۲}\left(a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + b_۱^۲ + b_۲^۲ + \cdots\right)$$

$$= Ta_۰^۲ + \frac{T}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty}(a_n^۲ + b_n^۲). \quad (۲۳.۵۰)$$

این معادله «قضیه‌ی انرژی» نامیده می‌شود و می‌گوید که انرژی کل در موج دقیقاً مجموع انرژی‌ها در تمام مؤلفه‌های فوریه است. برای مثال با اعمال این قضیه به سری (۲۳.۵۰)، چون $[f(t)]^۲ = ۱$ پس

$$T = \frac{T}{۲}\cdot\left(\frac{۴}{\pi}\right)^۲\left(۱ + \frac{۱}{۳^۲} + \frac{۱}{۵^۲} + \frac{۱}{۷^۲} + \cdots\right),$$

*این سری را می‌توان به‌صورت زیر ارزیابی نمود. اولاً ملاحظه می‌کنیم که $\int_۰^x \left[dx/\left(۱+x^۲\right)\right] = \tan^{-۱} x$. ثانیاً انتگرالده را در سری $۱ - x^۲ + x^۴ - x^۶ \pm \ldots = ۱/(۱+x^۲)$ بسط می‌دهیم. از این سری جمله به جمله (از صفر تا x) انتگرال می‌گیریم تا بدست بیاوریم $\tan^{-۱} x = x - x^۳/۳ + x^۵/۵ - x^۷/۷ \pm \ldots$. با قراردادن $x = ۱$، به نتیجه‌ی گفته‌شده می‌رسیم، زیرا $tan^{-۱}۱ = \pi/۴$.

[46]The energy theorem

بنابراین ما یاد می‌گیریم که مجموع مجذورات وارون‌های اعداد صحیح فرد برابر با $\pi^۲/۸$ است. به روشی مشابه، ابتدا توسط بدست آوردن سری فوریه برای تابع $f(t) = (tT/۲)^۲$ و سپس با استفاده از قضیه‌ی انرژی، می‌توانیم ثابت کنیم که $۱ + ۱/۲^۴ + ۱/۳^۴ + \ldots$ برابر با $\pi^۴/۹۰$ است، نتیجه‌ای که در فصل ۴۵ مورد نیاز ما بود.

۶.۵۰ پاسخ‌های غیرخطی[47]

در نهایت، در نظریه‌ی هماهنگ‌ها پدیده‌ی مهمی وجود دارد که باید به دلیل اهمیت عملی آن، یعنی آثار غیرخطی‌اش، مورد توجه قرار گیرد. در تمام دستگاه‌هایی[48] که تاکنون در نظر گرفته‌ایم، فرض کرده‌ایم که همه چیز خطی است، یعنی پاسخ‌ها به نیروها، مثلاً جابه‌جایی‌ها یا شتاب‌ها، همیشه متناسب با نیروها بودند. یا اینکه جریان‌ها در مدارها متناسب با ولتاژها بودند و غیره. اکنون می‌خواهیم مواردی که در آن تناسب دقیقی وجود ندارد در نظر بگیریم. فعلاً، ما به دستگاهی فکر می‌کنیم که در آن پاسخ، که در زمان t آن را x_{out} می‌نامیم، توسط ورودی x_{in} در زمان t تعیین شده‌است. به‌عنوان مثال، ممکن است x_{in} نیرو و x_{out} جابه‌جایی باشد. یا ممکن است x_{in} جریان و x_{out} ولتاژ باشد. اگر دستگاه خطی باشد، خواهیم داشت:

$$x_{\text{out}}(t) = Kx_{\text{in}}(t), \tag{۲۴.۵۰}$$

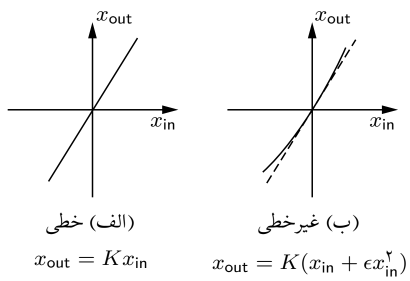
که در آن K ثابت مستقل از t و x_{in} است. با این حال فرض کنید، دستگاه تقریباً، اما نه دقیقاً، خطی است، به‌طوری که ما می‌توانیم بنویسیم:

$$x_{\text{out}}(t) = K[x_{\text{in}}(t) + \epsilon x_{\text{in}}^۲(t)], \tag{۲۵.۵۰}$$

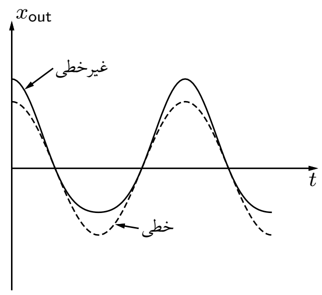
در اینجا ϵ در مقایسه با یک کوچک است. چنین پاسخ‌های خطی و غیرخطی در نمودارهای شکل ۴.۵۰ نشان داده شده‌اند.

پاسخ‌های غیرخطی چند پیامد عملی مهم دارند. اکنون برخی از آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم. ابتدا در نظر می‌گیریم اگر طنین خالصی در ورودی اعمال کنیم چه اتفاقی می‌افتد. $x_{in} = \cos\omega t$ قرار می‌دهیم. اگر x_{out} را به‌عنوان تابعی از زمان رسم کنیم منحنی خط پر نشان داده شده در شکل ۵.۵۰ را بدست می‌آوریم. برای مقایسه، منحنی خط تیره پاسخ یک دستگاه خطی را می‌دهد. می‌بینیم که (برای دستگاه غیرخطی) خروجی دیگر یک تابع کسینوسی نیست. این منحنی در بالا دارای قله تیزتر و در پایین مسطح‌تر است. می‌گوییم که خروجی دچار اعوجاج شده است. اما می‌دانیم که چنین موجی دیگر یک طنین خالص نیست، یعنی هماهنگ‌هایی خواهد داشت. می‌توانیم پیدا کنیم هماهنگ‌ها کدام‌اند. با استفاده از $x_{in} = \cos\omega t$

[47] Nonlinear responses
[48] systems



۴.۵۰. پاسخ‌های خطی و غیرخطی.



۵.۵۰. پاسخ یک دستگاه غیرخطی به ورودی $\cos \omega t$ پاسخ خطی برای مقایسه نشان داده شده‌است.

داریم:

$$x_{out}(t) = K(\cos \omega t + \epsilon \cos^2 \omega t). \qquad (۲۶.۵۰)$$

از معادله‌ی $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ داریم:

$$x_{out}(t) = K\left(\cos \omega t + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \cos 2\omega t\right). \qquad (۲۷.۵۰)$$

خروجی نه فقط مؤلفه‌ای در بسامد پایه دارد که در ورودی بود، بلکه مقداری از هماهنگ دومش را نیز دارد. همچنین در خروجی جمله‌ی ثابت $K(\epsilon/2)$ ظاهر می‌شود، که همان‌طور که در شکل ۵.۵۰ نشان داده شده، مربوط به جابه‌جایی مقدار متوسط است. فرآیند ایجاد جابه‌جایی در مقدار متوسط، اصلاح[49] نامیده می‌شود.

پاسخ غیرخطی اصلاح خواهد شد و هماهنگ‌هایی از بسامدها در ورودی‌اش ایجاد خواهد نمود. اگرچه فرض کردیم غیرخطی بودن فقط هماهنگ‌های دوم ایجاد می‌کند، غیرخطی بودن‌های از مرتبه‌ی بالاتر برای مثال آن‌هایی که جملاتی مانند x_{in}^3 و x_{in}^4 دارند، هماهنگ‌هایی بالاتر از هماهنگ‌های دوم ایجاد خواهد کرد.

[49] rectification

اثر دیگری که از پاسخ غیرخطی نتیجه می‌شود مدوله‌سازی[50] است. اگر تابع ورودی ما شامل دو طنین خالص (یا بیشتر) باشد، خروجی نه فقط هماهنگ‌های آن‌ها، بلکه مؤلفه‌های بسامد دیگر را هم دارد. فرض می‌کنیم $x_{in} = A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$، که اکنون نمی‌خواهیم ω_1 و ω_2 رابطه‌ی هماهنگی داشته باشند. علاوه بر جمله‌ی خطی (که K ضرب در ورودی است) مؤلفه‌ای در خروجی خواهیم داشت که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$x_{\text{out}} = K\epsilon(A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t)^2 \qquad (۲۸.۵۰)$$
$$= K\epsilon(A^2\cos^2\omega_1 t + B^2\cos^2\omega_2 t + 2AB\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t). \qquad (۲۹.۵۰)$$

دو جمله‌ی اول داخل پرانتز معادله‌ی (۲۹.۵۰) صرفاً آنهایی هستند که جملات ثابت و جملات هماهنگ دوم که در بالا پیدا کردیم را می‌دهند. جمله‌ی آخر جدید است.

ما می‌توانیم به این «جمله‌ی ضربدری» جدید $AB\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$ به دو روش نگاه کنیم! اول، اگر دو بسامد به طور گسترده‌ای متفاوت باشند (به‌عنوان مثال، اگر ω_1 خیلی بزرگتر از ω_2 باشد) می‌توانیم در نظر بگیریم که جمله‌ی ضربدری نوسان کسینوسی دامنه‌ی متغیر را نشان می‌دهد. یعنی، می‌توانیم به فاکتورهایی به این روش فکر کنیم:

$$AB\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = C(t)\cos\omega_1 t, \qquad (۳۰.۵۰)$$

با

$$C(t) = AB\cos\omega_2 t. \qquad (۳۱.۵۰)$$

می‌گوییم که دامنه‌ی $\cos\omega_1 t$ با بسامد ω_2 مدوله شده‌است.

به‌عنوان جایگزین، می‌توانیم جمله‌ی ضربدری را به روش دیگری بنویسیم:

$$AB\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = \frac{AB}{2}[\cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t]. \qquad (۳۲.۵۰)$$

اکنون می‌گوییم که دو مؤلفه‌ی جدید ایجاد شده‌اند، یکی در بسامد مجموع $(\omega_1+\omega_2)$، دیگری در بسامد تفاضلی $(\omega_1-\omega_2)$.

ما دو راه متفاوت، اما معادل برای نگاه کردن به یک نتیجه داریم. در حالت خاصی که $\omega_2 \ll \omega_1$، با ملاحظه‌ی اینکه چون $\omega_1+\omega_2$ و $\omega_1-\omega_2$ نزدیک یکدیگرند انتظار داریم زنش‌هایی بین آنها مشاهده شود، می‌توانیم این دو دیدگاه مختلف را مرتبط نماییم. اما این زنش‌ها فقط توانایی مدوله کردن دامنه‌ی بسامد متوسط ω_1 را به نصف بسامد تفاضلی $2\omega_2$ دارند. پس می‌بینیم، چرا این دو توصیف معادل هستنند.

به‌طور خلاصه، ما دریافته‌ایم که پاسخ غیرخطی چند اثر ایجاد می‌کند: اصلاح، تولید هماهنگ‌ها و مدوله‌سازی یا تولید مؤلفه‌هایی با بسامدهای مجموع و تفاضلی.

[50] modulation

باید توجه کنیم که تمامی این اثرات (معادله‌ی ۲۹.۵۰) نه تنها با ضریب غیرخطی ϵ؛ بلکه با حاصل‌ضرب دو دامنه‌ی $A^۲$، $B^۲$ یا AB متناسب هستند. انتظار داریم که این اثرات برای سیگنال‌های قوی بسیار مهم‌تر از سیگنال‌های ضعیف باشند.

اثراتی را که توضیح دادیم کاربردهای عملی متعددی دارند. اول، اعتقاد بر این است که گوش نسبت به صدا، غیرخطی است. علت چنین اعتقادی این حقیقت است که ما در مورد صداهای بلند حس شنیدنِ هماهنگ‌ها و نیز بسامدهای مجموع و تفاضل را داریم؛ حتی اگر امواج صوتی فقط شامل طنین‌های خالص باشد.

قطعاتی که در تجهیزات بازتولید صدا؛ تقویت کننده‌ها[۵۱]، بلندگوها و غیره استفاده می‌شوند؛ همیشه مقداری غیرخطی بودن دارند. آنها اعوجاج‌هایی[۵۲] در صدا ایجاد می‌کنند، هماهنگ‌هایی را تولید می‌کنند که در صدای اصلی وجود نداشته‌است. این قطعات جدید با گوش شنیده می‌شوند و ظاهراً ناخوشایند هستند. به همین دلیل است که ابزار «سیستم $Hi-Fi$» طوری طراحی شده است که تا آنجا که ممکن است خطی باشد (چرا غیرخطی بودن‌های گوش به همان روش «ناخوشایند» نیستند؟ یا حتی اینکه ما چگونه می‌دانیم که این غیرخطی بودن که به‌جای گوش، در بلندگو است واضح نیست؟!).

غیرخطی بودن‌ها کاملاً ضروری هستند و در واقع در بخش‌های خاصی از تجهیزات فرستنده و گیرنده‌ی رادیویی عمداً بزرگ ساخته شده‌اند. در یک فرستنده‌ی[۵۳] AM، سیگنال «صدای[۵۴]» مدار غیرخطی (با بسامدهای حدود کیلوسیکل[۵۵] در ثانیه) با بسامد سیگنال «حامل[۵۶]» (با بسامد حدود مگاسیکل[۵۷] بر ثانیه) در یک مدار غیرخطی به نام مدولاتور[۵۸] ترکیب می‌شود تا نوسان مدوله‌شده‌ای که منتقل می‌شود تولید نماید. در گیرنده[۵۹]، مؤلفه‌های سیگنال دریافت شده به یک مدار غیرخطی وارد می‌شوند که بسامدهای مجموع و تفاضل دریافت‌کننده مدوله‌شده را برای تولید دوباره سیگنال صدا ترکیب می‌نماید.

هنگامی که ما در مورد انتقال نور بحث می‌کنیم، فرض کردیم که نوسانات القایی بارها متناسب با میدان الکتریکی نور هستند، یعنی پاسخ خطی است. این در واقع تقریب بسیار خوبی است. تنها در چند سال گذشته است که منابع نوری ابداع شده‌اند (لیزرها) که شدت نور به اندازه‌ی کافی قوی تولید می‌کنند به‌طوری که اثرات غیرخطی مشاهده می‌شود. اکنون تولید هماهنگ‌های بسامدهای نور ممکن است. هنگامی که نور سرخ قوی از یک تکه شیشه عبور می‌کند، کمی نور آبی ــ هماهنگ دوم‌ــ بیرون می‌آید!

---

[51] amplifiers
[52] distortions
[53] transmitter
[54] voice
[55] kilocycle
[56] carrier
[57] megacycle
[58] modulator
[59] receiver