

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 49

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۴۹

مترجم: محمدمسعود هاشمی

ویراستار و حروف‌چین: یاسمین سادات پناهی، علی باقری کوچکسرائی

نسخه‌ی ۱.۱ تابستان ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

www.Zharfa90.ir

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۴۹

مدها^۱

۱.۴۹ بازتاب امواج^۲

در این فصل برخی از پدیده‌های جالب توجه که نتیجه‌ی جایگزیده‌کردن^۳ امواج در ناحیه‌ای محدود هستند مورد بررسی قرار می‌گیرند. ما برای اولین بار هدایت می‌شویم که برای مثال، چند واقعیت ویژه درباره ریسمان‌های ارتعاشی^۴ را کشف کنیم، و سپس تعمیم این واقعیت‌ها اصلی را به ما می‌دهد که احتمالاً عمومی‌ترین اصل ریاضی فیزیک^۵ است.

اولین مثال ما برای جایگزیده‌کردن امواج، جایگزیده‌کردن موج در یک مرز است. بگذارید مثال ساده‌ای را از یک موج یک بعدی روی یک ریسمان در نظر بگیریم. می‌توانستیم صدا را به طور هم ارز در یک بعد در برابر دیوار یا موقعیت‌های دیگر با ماهیت مشابه در نظر بگیریم، اما مثال ریسمان برای اهداف فعلی ما کافی خواهد بود. فرض کنید که ریسمان در یک انتها ثابت نگه داشته شود، به عنوان مثال با بستن آن به یک دیوار «بی‌نهایت جامد»^۶. این مطلب را می‌توان به صورت ریاضی با گفتن اینکه جابه‌جایی y ریسمان در مکان $x = 0$ باید صفر باشد بیان کرد، زیرا انتهای ریسمان حرکت نمی‌کند. حال اگر دیواری وجود نداشت، می‌دانیم که جواب عمومی برای حرکت، مجموع دو تابع $F(xct)$ و $G(x + ct)$ می‌شد، تابع اول نمایانگر موجی است که از یک مسیر در ریسمان حرکت می‌کند و تابع دوم موجی است که از مسیر دیگر در ریسمان حرکت می‌کند:

$$y = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (1.49)$$

جواب عمومی برای هر ریسمانی درست است. اما در مرحله‌ی بعد باید این شرط را که ریسمان در یک انتها حرکت نمی‌کند برآورده کنیم. اگر ما $x = 0$ را در معادله‌ی (۱.۴۹) قرار دهیم و y را برای هر مقدار از t

¹Modes

²reflection of waves

^۳جایگزیده معمولاً ترجمه‌ی localized در نظر گرفته می‌شود. در این فصل برای ترجمه‌ی confined که مکرراً نیز استفاده شده، پیشنهاد شده است.

⁴vibrating strings

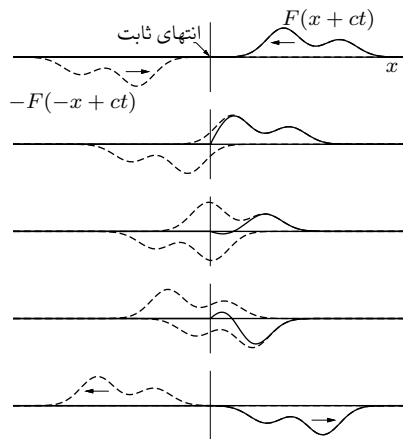
⁵mathematical physics

⁶infinitely solid

بررسی کنیم، $y = F(-ct) + G(+ct)$ را بدست می‌آوریم. حال اگر y برای همه زمان‌ها صفر باشد، به این معنی است که تابع $G(ct)$ باید برابر $-F(-ct)$ باشد. به عبارت دیگر، G هر چیزی باید برابر با تابع $-F$ منفی همان چیز باشد. اگر این نتیجه در معادله‌ی (۱.۴۹) قرار داده شود، درمی‌یابیم که جواب مسئله عبارت است از:

$$y = F(x - ct) - F(-x - ct). \quad (۲.۴۹)$$

بررسی اینکه اگر $x = 0$ قرار دهیم، $y = 0$ بدست می‌آوریم؛ آسان است.



۱.۴۹. بازتاب یک موج به صورت برهم‌نهی دو موج پیشرونده.

شکل ۱.۴۹ موجی را نشان می‌دهد که در جهت منفی x در نزدیکی $x = 0$ پیش می‌رود، و یک موج فرضی که در جهت دیگری با علامت مخالف و طرف دیگر مبدأ حرکت می‌کند. ما می‌گوییم فرضی، زیرا قطعاً در آن طرف مبدأ ریسمانی وجود ندارد تا ارتعاش کند. حرکت کلی ریسمان به صورت مجموع این دو موج در ناحیه‌ی مثبت x در نظر گرفته می‌شود. همین‌طور که این امواج به مبدأ می‌رسند، همیشه در $x = 0$ حذف می‌شوند و سرانجام موج (بازتابیده‌ی) دوم تنها موجی خواهد بود که برای مثبت x وجود دارد و البته در جهت مخالف پیش می‌رود. این نتایج معادل عبارت مقابل است: اگر موج به انتهای بسته‌ی ریسمان برسد، با تغییر در علامت بازتابیده خواهد شد. چنین بازتابی را همیشه می‌توان با تصور اینکه آنچه به انتهای ریسمان می‌رسد از پشت دیوار به صورت وارونه بیرون می‌آید، درک کرد. به طور خلاصه، اگر فرض کنیم ریسمان بی‌پایان است و هر زمان موجی به یک طرف می‌رود موج دیگری داریم که با تقارن گفته شده به طرف دیگر می‌رود، جابه‌جایی در $x = 0$ همیشه صفر خواهد بود و تفاوتی نمی‌کند اگر ریسمان را آنجا ببندیم.

نکته بعدی که باید مورد بحث قرار گیرد بازتاب موج دوره‌ای^۷ است. فرض کنید که موج نشان داده شده توسط $F(xct)$ یک موج سینوسی و بازتابیده شده است، همچنین موج بازتابیده $-F(-x - ct)$ نیز موج سینوسی با همان بسامد است، اما در جهت مخالف پیش می‌رود. این وضعیت را با استفاده از نماد تابع مختلط به سادگی می‌توان توضیح داد: $F(x - ct) = e^{i\omega(t-x/c)}$ و $F(-x - ct) = e^{i\omega(t+x/c)}$.

^۷periodic wave

می توان دریافت که اگر این ها در (۲۰۴۹) جایگزین شوند و اگر x برابر با ۰ قرار داده شود، در این صورت برای تمام مقادیر t ، $x = 0$ است، بنابراین شرط لازم را برآورده می کند. به خاطر خواص توابع نمایی، این معادله را می توان به شکل ساده تر نوشت:

$$y = e^{i\omega t}(e^{-i\omega x/c} - e^{i\omega x/c}) = -2ie^{i\omega t} \sin(\omega x/c). \quad (3.49)$$

در اینجا نکته ی جالب و جدیدی وجود دارد، این جواب به ما می گوید که اگر به هر x ثابتی نگاه کنیم، ریسمان با بسامد ω نوسان می کند. مهم نیست این نقطه کجا باشد، بسامد یکسان است! اما در برخی مکان ها به ویژه هر جا $\sin(\omega x/c) = 0$ است، اصلاً جابه جایی وجود ندارد. علاوه بر این، اگر در هر زمان t از ریسمان در حال ارتعاش عکس بگیریم، تصویر، یک موج سینوسی خواهد بود. با این وجود، جابه جایی این موج سینوسی به زمان t بستگی دارد. از بررسی معادله ی (۳۰۴۹) می بینیم که طول یک چرخه ی موج سینوسی برابر با طول موج هر یک از امواج برهم نهاده^۸ است:

$$\lambda = 2\pi c/\omega. \quad (4.49)$$

نقاطی که در آنجا حرکتی وجود ندارد شرط $\sin(\omega x/c) = 0$ را برآورده می کنند، که به این معنی است که $\omega x/c = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi, \dots$ به این نقاط، گره^۹ گفته می شود. بین هر دو گره ی متوالی، هر نقطه به صورت سینوسی بالا و پایین می رود، اما این الگوی حرکت در فضا ثابت می ماند. این ویژگی اساسی چیزی است که ما مد می نامیم. اگر کسی بتواند الگویی حرکتی را پیدا کند که دارای این خاصیت باشد که در هر نقطه، جسم کاملاً به صورت سینوسی حرکت کند، و تمام نقاط نیز با همان بسامد حرکت کنند (گرچه برخی بیشتر از سایرین حرکت می کنند)، در این صورت ما آنچه را که مد نامیده می شود، خواهیم داشت.

۲۰۴۹ امواج جایگزیده^{۱۰}، با بسامدهای طبیعی

مسئله جالب بعدی این است که بررسی کنیم اگر ریسمان در هر دو انتها، مثلاً در $x = 0$ و $x = L$ ، ثابت نگه داشته شود چه اتفاقی می افتد. می توانیم با ایده ی بازتاب امواج شروع کنیم، که با نوعی برآمدگی^{۱۱} در حال حرکت در یک جهت شروع می شود. با گذشت زمان، انتظار داریم که این برآمدگی به یک انتها نزدیک شود و با گذشت بیشتر زمان، به نوعی حرکت لرزشی^{۱۲} کوچک تبدیل شود، زیرا با برآمدگی تصویر وارونه که از طرف دیگر می آید ترکیب می شود. سرانجام برآمدگی اصلی از بین می رود و برآمدگی تصویر در جهت دیگر حرکت می کند تا فرایند در انتهای دیگر تکرار شود. این مسئله راه حل ساده ای دارد، اما یک سوال جالب این است که آیا ما می توانیم حرکتی سینوسی داشته باشیم؟ (جوابی که اکنون شرح داده شد دوره ای است، اما دوره ای سینوسی نیست). بگذارید قرار دادن یک موج دوره ای سینوسی بر روی ریسمان را امتحان کنیم. اگر ریسمان در یک انتها گره خورده باشد، می دانیم که جواب باید مانند جواب قبلی ما (۳۰۴۹) به نظر برسد. اگر در انتهای دیگر گره خورده باشد، جواب باید در انتهای دیگر یکسان به نظر برسد. بنابراین تنها امکان برای حرکت سینوسی دوره ای این است که موج سینوسی باید به خوبی در طول ریسمان گنجانده شود.

⁸superimposed waves

¹¹bump

⁹node

¹²wobble

¹⁰confined waves

اگر این موج در طول ریسمان نگنجد، پس یک بسامد طبیعی نیست که در آن ریسمان بتواند به نوسان ادامه دهد. به طور خلاصه، اگر ریسمان با شکل موج سینوسی که درست در آن می‌گنجد شروع کند، در این صورت همچنان به حفظ شکل کامل موج سینوسی ادامه می‌دهد و به‌طور هماهنگ در بسامدی نوسان می‌کند. به صورت ریاضی می‌توانیم $\sin kx$ را برای این شکل بنویسیم، که در اینجا k برابر با عامل (ω/c) در معادلات (۳.۴۹) و (۴.۴۹) است، و این تابع در $x = 0$ برابر با صفر خواهد بود. با این حال، در انتهای دیگر نیز باید صفر باشد. اهمیت این موضوع در این است که k ، آن طور که در مورد ریسمان نیمه باز بود، دیگر اختیاری نیست. با ریسمان بسته شده در هر دو انتها، تنها احتمال این است که $\sin(kL) = 0$ باشد، زیرا این تنها شرطی است که هر دو انتها را ثابت نگه دارد. اکنون برای اینکه سینوس، صفر باشد، زاویه باید $0, \pi, 2\pi$ یا مضرب صحیح دیگری از π باشد. بنابراین، معادله‌ی

$$kL = n\pi \quad (۵.۴۹)$$

بسته به اینکه کدام عدد صحیح در آن قرار داده شده است، یکی از k های ممکن را می‌دهد. برای هر یک از k ها یک بسامد معین ω وجود دارد، که طبق (۳.۴۹) به سادگی عبارت است از:

$$\omega = kc = n\pi c/L. \quad (۶.۴۹)$$

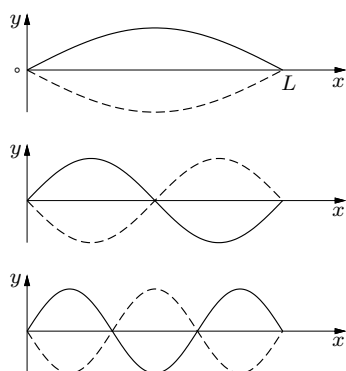
بنابراین نتیجه‌ی مقابل را پیدا کردیم: ریسمان دارای خاصیتی است که می‌تواند حرکات سینوسی داشته باشد، اما فقط در بسامدهای معین. این مهم‌ترین ویژگی امواج جایگزیده است. مهم نیست که سیستم چقدر پیچیده باشد، همیشه معلوم می‌شود که تعدادی الگوی حرکت وجود دارد که وابستگی زمانی سینوسی کامل دارند، اما با بسامدهایی که خاصیتی از آن سیستم خاص و ماهیت مرزهای آن هستند. در مورد ریسمان چندین بسامد ممکن مختلف داریم، که هر یک طبق تعریف، متناظر با یک مد هستند، زیرا مد یک الگوی حرکتی است که خود را به صورت سینوسی تکرار می‌کند. شکل ۲.۴۹ سه مد اول برای یک ریسمان را نشان می‌دهد. برای مد اول طول موج λ برابر $2L$ است. این را می‌توان با ادامه‌دادن موج تا $x = 2L$ برای بدست آوردن یک چرخه کامل موج سینوسی مشاهده کرد. به طور کلی، بسامد زاویه‌ای ω برابر است با $2\pi c$ تقسیم بر طول موج، و در این مورد چون λ برابر $2L$ است، بسامد $\pi c/L$ است که با $n = 1$ با (۶.۴۹) مطابقت دارد. بیایید بسامد مد اول را ω_1 بنامیم. اکنون مد بعدی، دو حلقه را با یک گره در وسط نشان می‌دهد. برای این مد، طول موج به سادگی L است. مقدار متناظر k دو برابر بزرگ‌تر و بسامد دو برابر بزرگ‌تر یعنی $2\omega_1$ است. برای مد سوم بسامد $3\omega_1$ است و الی آخر. بنابراین همه بسامدهای مختلف ریسمان ضرایب ۱، ۲، ۳، ۴ و الی آخر کم‌ترین بسامد ω_1 هستند.

حال با بازگشت به حرکت عمومی ریسمان، معلوم می‌شود که هر حرکت ممکن را همیشه می‌توان با بیان اینکه هم‌زمان بیش از یک مد کار می‌کند تحلیل کرد. در واقع برای حرکت عمومی باید تعداد بی‌پایانی مد در یک زمان برانگیخته شوند. برای اینکه ایده‌ای از این موضوع بدست آوریم، بگذارید نشان دهیم وقتی دو مد در حال نوسان در یک زمان وجود دارد چه اتفاقی می‌افتد: فرض کنید مد اول را داریم که همان‌طور نوسان می‌کند که در تصاویر متوالی در شکل ۳.۴۹، که خمیدگی^{۱۳} ریسمان را برای بازه‌های زمانی برابر گسترش یافته از نیم چرخه‌ی کم‌ترین بسامد نشان می‌دهد، نمایش داده شده است.

اکنون فرض می‌کنیم که در همان زمان، نوسان مد دوم نیز وجود دارد، شکل ۳.۴۹، همچنین تصاویر متوالی از این مد را نشان می‌دهد، که در شروع 90° با مد اول اختلاف فاز دارد. این بدان معنا است که

¹³deflection

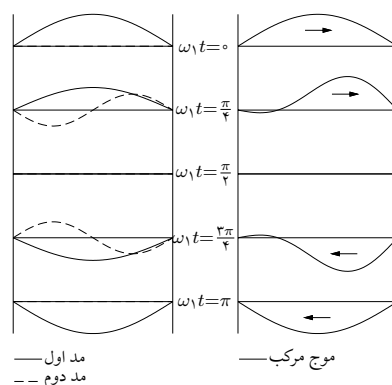
۲.۴۹. امواج جابجزیده، با بسامدهای طبیعی



۲.۴۹. سه مد اول یک ریسمان ارتعاشی.

ریسمان در ابتدا جابه‌جایی ندارد، اما دو نیمه‌ی آن سرعت‌هایی با جهت مخالف دارند. حال یک اصل کلی را در رابطه با سیستم‌های خطی به یاد می‌آوریم: اگر دو جواب وجود داشته باشد، مجموع آن‌ها نیز یک جواب است. بنابراین حرکت احتمالی سوم ریسمان جابه‌جایی‌ای خواهد بود که با جمع‌زدن دو جواب نشان داده شده در شکل ۳.۴۹ بدست می‌آید. نتیجه‌ای که در شکل نیز نشان داده شده است، ایده‌ی یک برآمدگی را که بین دو انتهای ریسمان عقب و جلو می‌رود پیشنهاد می‌کند، اگرچه ما تنها با دو مد نمی‌توانیم تصویر بسیار خوبی از آن ایجاد کنیم و مدهای بیشتری مورد نیاز است. این نتیجه در حقیقت یک مورد خاص از یک اصل عالی برای سیستم‌های خطی است:

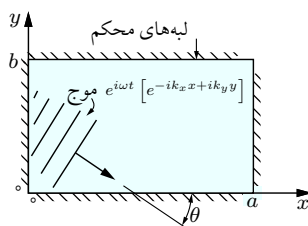
هر حرکتی را می‌توان با این فرض که مجموع حرکت‌های تمام مدهای مختلف، همراه با دامنه‌ها و فازهای مناسب باشد تحلیل کرد.



۳.۴۹. دو مد برای ایجاد یک موج پیش‌رونده ترکیب می‌شوند.

اهمیت این اصل از این واقعیت ناشی می‌شود که هر مد بسیار ساده است، مد چیزی غیر از حرکت سینوسی در زمان نیست. درست است که حتی حرکت عمومی یک ریسمان واقعاً خیلی پیچیده نیست، اما سیستم‌های دیگری وجود دارد، به عنوان مثال حرکت ضربتی^{۱۴} بال هواپیما، که در آن حرکت بسیار پیچیده‌تر است. با

¹⁴whipping



۴.۴۹. صفحه مستطیلی ارتعاشی.

این وجود، حتی با بال هواپیما نیز می‌فهمیم روش خاصی برای پیچاندن وجود دارد که یک بسامد دارد و روش‌های دیگر پیچاندن^{۱۵} نیز وجود دارد که بسامدهای دیگری دارند. اگر این مدها یافته شود، در این صورت حرکت کامل همیشه می‌تواند به عنوان برهم‌نهی نوسان‌های هماهنگ^{۱۶} مورد تحلیل قرار گیرد (به جز هنگامی که حرکت ضربتی به حدی باشد که سیستم دیگر نتواند به صورت خطی در نظر گرفته شود).

۳.۴۹ مدها در دو بعد

مثال بعدی که در نظر گرفته می‌شود، وضعیت جالب مدها در دو بعد است. تا اینجا فقط در مورد وضعیت‌های یک بعدی صحبت کرده‌ایم، ریسمان کشیده یا امواج صوتی^{۱۷} در یک لوله. در نهایت باید سه بعد را در نظر بگیریم، اما یک مرحله آسان‌تر، بررسی دو بعد خواهد بود. برای مشخص شدن، یک پوست تپل^{۱۸} لاستیکی مستطیلی را در نظر بگیرید که طوری محدود شده است که جابه‌جایی‌ای در هیچ جای لبه مستطیلی ندارد، و فرض کنید ابعاد مستطیل a و b باشد، همان‌طور که در شکل ۴.۴۹ نشان داده شده است. حال سؤال اینجاست که ویژگی‌های حرکت احتمالی چه هستند؟ ما می‌توانیم با همان روشی که برای ریسمان استفاده شد شروع کنیم. اگر اصلاً جایگزیدگی نداشتیم، انتظار امواج پیش‌رونده با نوعی حرکت موجی را داشتیم. به عنوان مثال، $(e^{-ik_x x + ik_y y})(e^{i\omega t})$ ، یک موج سینوسی را نشان می‌دهد که در جهتی پیش می‌رود که بستگی به مقادیر نسبی k_x و k_y دارد. حال چگونه می‌توانیم محور x یعنی خط $y = 0$ را خط گره‌ای کنیم؟ با استفاده از ایده‌های توسعه‌یافته برای ریسمان یک بعدی، می‌توانیم موج دیگری را که توسط تابع مختلط $(-e^{i\omega t})(e^{-ik_x x - ik_y y})$ نشان داده شده است تصور کنیم. برهم‌نهی این امواج بدون در نظر گرفتن مقادیر x و t ، جابه‌جایی صفر در $y = 0$ را نتیجه خواهد داد؛ (اگرچه این توابع برای y منفی تعریف شده است، جایی که هیچ پوست تپلی برای ارتعاش کردن وجود ندارد، اما این را می‌توانیم نادیده بگیریم، زیرا جابه‌جایی در $y = 0$ واقعاً صفر است). در این حالت می‌توانیم تابع دوم را به عنوان موج بازتابیده در نظر بگیریم.

با این حال، ما یک خط گره‌ای^{۱۹} در $y = b$ و همچنین در $y = 0$ می‌خواهیم. چگونه این کار را انجام دهیم؟ راه حل، مرتبط با کاری است که هنگام مطالعه بازتاب از بلورها انجام دادیم. این امواج که یکدیگر را در $y = 0$ حذف می‌کنند، فقط اگر $2b \sin \theta$ مضرب صحیحی از λ باشد همین کار را در $y = b$ نیز

¹⁵twisting¹⁶harmonic¹⁷sound waves¹⁸drumhead¹⁹nodal line

انجام می‌دهند، که در اینجا θ زاویه نشان داده شده در شکل ۴.۴۹ است:

$$m\lambda = 2b \sin \theta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (۷.۴۹)$$

اکنون به همان روش می‌توانیم محور y را با اضافه کردن دو تابع بیشتر $(e^{i\omega t})(e^{+ik_x x + ik_y y})$ و $-(e^{i\omega t})(e^{+ik_x x - ik_y y})$ که هرکدام بازتاب یکی از دو موج دیگر از خط $x = 0$ را نشان می‌دهد، یک خط گره‌ای کنیم. شرط داشتن خط گره‌ای در $x = a$ شبیه به شرطی است که برای $y = b$ داشتیم. این شرط این است که $2a \cos \theta$ باید مضرب صحیحی از λ باشد:

$$n\lambda = 2a \cos \theta. \quad (۸.۴۹)$$

بنابراین نتیجه نهایی این است که امواجی که در جعبه رفت و برگشت می‌کنند، الگوی موج ایستاده^{۲۰} تولید می‌کنند، یعنی یک مد معین.

بنابراین اگر بخواهیم مد داشته باشیم باید دو شرط بالا را برآورده کنیم. اجازه دهید ابتدا طول موج را پیدا کنیم. با حذف زاویه θ از (۷.۴۹) و (۸.۴۹) می‌توان طول موج را برحسب a, b, n و m به دست آورد. آسان‌ترین راه برای انجام این کار تقسیم هر دو طرف معادلات مربوطه به $2a$ و $2b$ ، مجذورکردن آن‌ها و جمع کردن دو معادله با هم است. نتیجه $(m\lambda/2b)^2 + (n\lambda/2a)^2 = 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ است، که می‌تواند برای λ حل شود:

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{n^2}{4a^2} + \frac{m^2}{4b^2}. \quad (۹.۴۹)$$

به این ترتیب ما طول موج را بر حسب دو عدد صحیح تعیین می‌کنیم، و از طول موج فوراً بسامد ω را بدست می‌آوریم، زیرا همان‌طور که می‌دانیم، بسامد برابر با $2\pi c$ تقسیم بر طول موج است.

این نتیجه به اندازه کافی جالب و مهم است که باید آن را با یک تحلیل صرفاً ریاضی به جای استدلال درباره بازتاب‌ها بدست بیاوریم. اجازه دهید نوسان را با برهم‌نهی چهار موج که طوری انتخاب شده‌اند که چهار خط $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ همه گره هستند نشان دهیم. علاوه بر این ما نیاز داریم که همه موج‌ها بسامد یکسانی داشته باشند، تا حرکت نتیجه شده، یک مد را نشان دهد. از بررسی قبلی بازتاب نور می‌دانیم که $(e^{i\omega t})(e^{-ik_x x + ik_y y})$ موجی را نشان می‌دهد که در جهت مشخص شده در شکل ۴.۴۹ حرکت می‌کند. معادله (۴.۴۹) یعنی $k = \omega/c$ ، هنوز هم برقرار است، به شرط آن که:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (۱۰.۴۹)$$

از شکل مشخص است که $k_x = k \cos \theta$ و $k_y = k \sin \theta$ است. اکنون معادله‌ی ما برای جابه‌جایی ϕ پوست تپل مستطیلی فرم بزرگ زیر را می‌گیرد:

$$\phi = [e^{i\omega t}][e^{-ik_x x + ik_y y} - e^{+ik_x x + ik_y y} - e^{-ik_x x - ik_y y} + e^{+ik_x x - ik_y y}]. \quad (۱۱.۴۹)$$

اگرچه این معادله نسبتاً شلوغ به نظر می‌رسد، اما مجموع این عبارات خیلی نامطبوع نیست. توابع نمایی را می‌توان ترکیب کرد تا توابع سینوسی ایجاد شود، به طوری که معلوم می‌شود جابه‌جایی عبارت است از:

$$\phi = [4 \sin k_x x \sin k_y y][e^{i\omega t}]. \quad (۱۱.۴۹ ب)$$

²⁰standing-wave

به عبارت دیگر این یک نوسان سینوسی است، البته با الگویی که آن هم در هر دو جهت x و y سینوسی است. شرایط مرزی ما در $x = 0$ و $y = 0$ برآورده می‌شوند. ما همچنین می‌خواهیم وقتی $x = a$ یا $y = b$ است، ϕ صفر باشد. بنابراین ما باید دو شرط دیگر را نیز قرار دهیم: $k_x a$ باید مضرب صحیحی از π باشد، و $k_y b$ باید مضرب صحیح دیگری از π باشد. چون دیده‌ایم که $k_x = k \cos \theta$ و $k_y = k \sin \theta$ ، فوراً به معادلات (۷.۴۹) و (۸.۴۹) می‌رسیم و از این‌ها نتیجه‌ی نهایی (۹.۴۹) را بدست می‌آوریم. حالا بگذارید برای مثال، مستطیلی که طول آن دو برابر عرض است را در نظر بگیریم. اگر $a = b$ بگیریم و از معادلات (۴.۴۹) و (۹.۴۹) استفاده کنیم، می‌توانیم بسامدهای همه‌ی مدها را محاسبه کنیم:

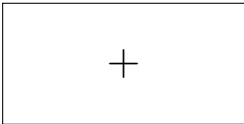
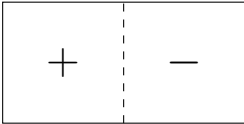
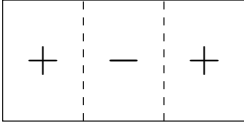
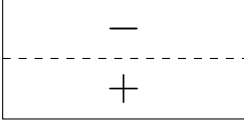
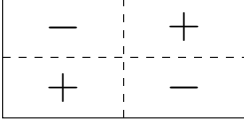
$$\omega^2 = \left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 \frac{4m^2 + n^2}{4}. \quad (12.49)$$

در جدول ۱.۴۹ چند مد ساده فهرست شده و شکل آن‌ها نیز به روش کیفی نشان داده شده است. مهم‌ترین نکته‌ای که باید در این مورد خاص تأکید شود این است که بسامدها مضرب‌های یکدیگر نیستند، و همچنین مضرب‌های هیچ عددی نیستند. این ایده که بسامدهای طبیعی به‌طور هماهنگ با یکدیگر مرتبط هستند، عموماً درست نیست. این ایده برای سیستمی با بیش از یک بعد، و نیز برای سیستم‌های یک بعدی پیچیده‌تر از ریسمانی با چگالی و کشش^{۲۱} یکنواخت، صادق نیست. یک مثال ساده از مورد دوم، زنجیری آویزان است که در آن کشش در بالا بیشتر از پایین است. اگر چنین زنجیری در نوسان هماهنگ تنظیم شده باشد، مدها و بسامدهای مختلفی وجود دارد، اما بسامدها مضرب‌های ساده هیچ عددی نیستند، و شکل‌های مد نیز، سینوسی نیستند.

مدهای سیستم‌های پیچیده‌تر باز هم پیچیده‌تر هستند. مثلاً ما در داخل دهان، حفره‌ای بالای تارهای صوتی داریم و با حرکت دادن زبان و لب‌ها و غیره، یک لوله با انتهای باز یا بسته و با قطرهای مختلف می‌سازیم، این یک مشدد^{۲۲} بسیار پیچیده است، اما در هر حال مشدد است. اکنون وقتی کسی با تارهای صوتی صحبت می‌کند، این‌ها ساخته شده‌اند تا نوعی از طنین^{۲۳} تولید کنند. طنین نسبتاً پیچیده است و بسیاری از صداها بیرون می‌آیند، اما حفره‌ی دهان به دلیل بسامدهای تشدیدی مختلف حفره، باز هم آن طنین را تغییر می‌دهد. به عنوان مثال، یک خواننده می‌تواند حروف صدا دار مختلف a ، o یا oo و غیره را با همان ارتفاع^{۲۴} بخواند، اما این‌ها متفاوت به نظر می‌رسند زیرا هماهنگ‌های مختلف در درجات متفاوتی در این حفره در تشدید هستند. اهمیت بسیار زیاد بسامدهای تشدیدی حفره در تغییر اصوات صوتی^{۲۵} را می‌توان با یک آزمایش ساده نشان داد. از آنجا که تندی صدا با واریون ریشه دوم چگالی متناسب است، ممکن است با استفاده از گازهای مختلف تغییر کند. اگر کسی به جای هوا از هلیوم استفاده کند، به‌طوری که چگالی پایین‌تر باشد، تندی صدا بسیار بیشتر است، و تمام بسامدهای حفره بالا خواهد رفت. در نتیجه اگر کسی قبل از صحبت ریه‌های خود را با هلیوم پر کند، خصوصیت صدای او به طرز چشمگیری تغییر خواهد کرد، اگرچه ممکن است تارهای صوتی هنوز هم با همان بسامد ارتعاش کنند.

²¹tension²²resonator²³tone²⁴pitch²⁵voice sounds

جدول ۱.۴۹

شکل حالت	m	n	$(\omega/\omega_0)^2$	ω/ω_0
	۱	۱	۱/۲۵	۱/۱۲
	۱	۲	۲/۵۰	۱/۴۱
	۱	۳	۳/۲۵	۱/۸۰
	۲	۱	۴/۲۵	۲/۵۰
	۲	۲	۵/۵۰	۲/۲۴

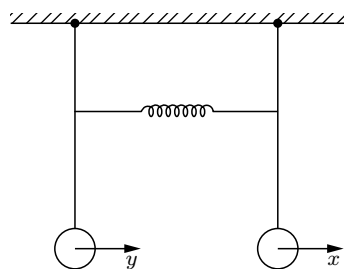
۴.۴۹ آونگ‌های جفت‌شده^{۲۶}

سرانجام باید تأکید کنیم که مدها نه تنها برای سیستم‌های پیوسته‌ی پیچیده، بلکه برای سیستم‌های مکانیکی بسیار ساده نیز وجود دارند. یک مثال خوب سیستم دو آونگ جفت‌شده است که در فصل قبل مورد بحث قرار گرفته است. در این فصل نشان داده شد که این حرکت را می‌توان به عنوان برهم‌نهم دو حرکت هماهنگ با بسامدهای متفاوت تحلیل کرد. بنابراین حتی این سیستم را می‌توان برحسب حرکت‌ها یا مدهای هماهنگ تحلیل کرد. ریسمان و همچنین سطح دو بعدی، تعداد بی‌پایان مد دارند. اگر بدانیم که چگونه بی‌نهایت‌ها را حساب کنیم، به یک معنی این بی‌نهایت مضاعف^{۲۷} است. اما یک شیء ساده‌ی مکانیکی که فقط دو درجه آزادی^{۲۸} دارد، و فقط دو متغیر برای توصیف آن نیاز است، تنها دو مد دارد.

بگذارید برای موردی که آونگ‌ها طول برابر دارند، تحلیل ریاضی این دو مد را انجام دهیم. فرض کنید جابه‌جایی یکی x و جابه‌جایی دیگری y باشد، همان‌طور که در شکل ۵.۴۹ نشان داده شده است. بدون فنر، نیروی روی جرم اول به دلیل گرانش متناسب با جابه‌جایی این جرم است. اگر فنر نباشد، بسامد طبیعی معینی فقط برای این جرم وجود خواهد داشت! معادله حرکت بدون فنر خواهد بود:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (۱۳.۴۹)$$

^{۲۶}Coupled pendulums^{۲۸}degree of freedom^{۲۷}double infinity



۵.۴۹. دو آونگ جفت شده.

اگر فنر نباشد، آونگ دیگر به همین روش نوسان می‌کند. علاوه بر نیروی بازگرداننده^{۲۹} ناشی از گرانش، نیرویی اضافی وجود دارد که جرم اول را به سمت خود می‌کشد. این نیرو به فاصله‌ی اضافی x نسبت به y بستگی دارد و متناسب با آن است؛ بنابراین برابر با مقداری ثابت است، که به هندسه بستگی دارد، ضربدر $(x - y)$. همان نیرو در جهت معکوس بر جرم دوم عمل می‌کند. بنابراین معادلات حرکتی که باید حل شوند عبارتند از:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - k(x - y), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y - k(y - x). \quad (۱۴.۴۹)$$

برای پیدا کردن حرکتی که در آن هر دو جرم با بسامد یکسان حرکت می‌کنند، باید تعیین کنیم که هر جرم چقدر حرکت می‌کند. به عبارت دیگر آونگ x و آونگ y با بسامد یکسان نوسان می‌کنند، اما دامنه‌های آن‌ها باید مقادیر معین A و B را داشته باشند که رابطه‌ی آن‌ها ثابت است. بیا این جواب را امتحان کنیم:

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad y = Be^{i\omega t}. \quad (۱۵.۴۹)$$

اگر این‌ها در معادلات (۱۴.۴۹) جایگزین شوند و عبارات مشابه جمع‌آوری شود، نتایج عبارتند از:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right) A &= -\frac{k}{m} B, \\ \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right) B &= -\frac{k}{m} A. \end{aligned} \quad (۱۶.۴۹)$$

از این معادلات این‌طور که نوشته شده‌اند، عامل مشترک $e^{i\omega t}$ حذف شده و به m تقسیم شده‌اند. اکنون می‌بینیم که برای آنچه دو مجهول به نظر می‌رسند دو معادله داریم. اما در واقع دو مجهول وجود ندارد، زیرا اندازه‌ی کل حرکت^{۳۰} چیزی است که ما نمی‌توانیم از این معادلات تعیین کنیم. معادلات فوق فقط می‌توانند نسبت A به B را تعیین کنند، اما هر دو باید نسبت یکسانی را بدهند. برای اینکه هر دو معادله سازگار باشند باید بسامد چیز بسیار خاصی باشد. در این حالت خاص، این معادلات می‌توانند به راحتی حل شوند. اگر این دو معادله در هم ضرب شوند، نتیجه این است:

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{k}{m} \right)^2 AB = \left(\frac{k}{m} \right)^2 AB. \quad (۱۷.۴۹)$$

²⁹force of restoration

³⁰whole size of the motion

عبارت AB را می‌توان از هر دو طرف حذف کرد مگر اینکه A و B صفر باشند، که یعنی اصلاً حرکتی وجود ندارد. اگر حرکت وجود داشته باشد، باید عبارات دیگر برابر باشند که منجر به یک معادله‌ی درجه دوم برای حل کردن می‌شود. نتیجه این است که دو بسامد ممکن وجود دارد:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}. \quad (18.49)$$

علاوه بر این، اگر این مقادیر بسامد در معادله‌ی (۱۶.۴۹) جایگزین شوند، درمی‌یابیم که برای بسامد اول $A = B$ و برای بسامد دوم $A = -B$ است. این‌ها «اشکال مد» هستند، که می‌توانند به راحتی از طریق آزمایش تأیید شوند.

واضح است که در مد اول، جایی که $A = B$ است، فنر هرگز کشیده نمی‌شود، و هر دو جرم در بسامد ω_0 نوسان می‌کنند، مثل اینکه فنر وجود ندارد. در جواب دیگر، جایی که $A = -B$ است، فنر در یک نیروی بازگرداننده مشارکت می‌کند و بسامد را بالا می‌برد. اگر آونگ‌ها طول‌های متفاوتی داشته باشند، حالت جالب‌تری بدست می‌آید. تحلیل آن بسیار شبیه به آنچه در بالا آورده شده می‌باشد، و به عنوان تمرین برای خواننده باقی گذاشته می‌شود.

۵.۴۹ سیستم‌های خطی^{۳۱}

حال بیایید ایده‌های بحث‌شده در بالا را، که همه جنبه‌هایی از چیزی هستند که احتمالاً عمومی‌ترین و شگفت‌انگیزترین اصل ریاضی فیزیک است، خلاصه کنیم. اگر ما یک سیستم خطی داشته باشیم که ویژگی آن مستقل از زمان است، در این صورت لازم نیست حرکت سادگی خاصی داشته باشد، و در واقع ممکن است بسیار پیچیده باشد. اما حرکات بسیار ویژه‌ای وجود دارد، معمولاً یک سری حرکات ویژه، که در آن کل الگوی حرکت به صورت نمایی با زمان تغییر می‌کند. برای سیستم‌های ارتعاشی که اکنون درباره آن‌ها صحبت می‌کنیم، تابع نمایی موهومی^{۳۲} است، و به جای گفتن «به صورت نمایی» ممکن است ترجیح دهیم بگوییم «به صورت سینوسی» با زمان تغییر می‌کند. با این حال، ما می‌توانیم کلی‌تر نگاه کنیم و بگوییم این حرکات به صورت نمایی با زمان در مدهای بسیار ویژه‌ای، با اشکال بسیار ویژه‌ای تغییر می‌کنند. عمومی‌ترین حرکت سیستم همیشه می‌تواند به صورت برهم‌نهی از حرکات مربوط به هر یک از نماهای مختلف نشان داده شود.

شایسته است که دوباره در مورد حرکت سینوسی صحبت کنیم: یک سیستم خطی لازم نیست با حرکتی کاملاً سینوسی حرکت کند، یعنی در یک تک بسامد معین، اما بدون اینکه چگونگی حرکت آن مهم باشد، این حرکت می‌تواند به صورت برهم‌نهی حرکات سینوسی خالص نشان داده شود. بسامد هر یک از این حرکات مشخصه‌ای از سیستم است و الگو یا شکل موج هر حرکت نیز مشخصه‌ای از سیستم است. حرکت کلی در هر سیستم این چنینی ممکن است با دادن قدرت و فاز هر یک از این مدها، و افزودن همه آن‌ها با هم مشخص شود. به عبارت دیگر هر سیستم ارتعاشی خطی معادل مجموعه‌ای از نوسانگرهای هماهنگ مستقل، با بسامدهای طبیعی متناظر با مدها است.

این فصل را با ملاحظه‌ی ارتباط مدها با مکانیک کوانتومی به پایان می‌رسانیم. در مکانیک کوانتومی شیء در حال ارتعاش یا چیز دیگری که در فضا تغییر می‌کند، دامنه‌ی یک تابع احتمال است که احتمال یافتن

³¹Linear systems

³²imaginary

الکترون یا سیستم الکترون‌ها در پیکربندی معینی را می‌دهد. این تابع دامنه^{۳۳} می‌تواند در فضا و زمان تغییر کند، و در واقع در معادله خطی صدق کند. اما در مکانیک کوانتومی تبدیلی وجود دارد که در آن، آنچه ما بسامد دامنه احتمال می‌نامیم، در ایده‌ی کلاسیک برابر با انرژی است. بنابراین می‌توانیم اصل بیان شده در بالا را با در نظر گرفتن لغت بسامد و جایگزین کردن آن با انرژی به همین حالت منتقل کنیم. این موضوع به چیزی شبیه این تبدیل می‌شود: نیازی نیست که یک سیستم مکانیک کوانتومی، به عنوان مثال یک اتم، انرژی معینی داشته باشد، درست همان‌طور که یک سیستم مکانیکی ساده لازم نیست بسامد معینی داشته باشد؛ اما بدون اینکه چگونگی رفتار سیستم مهم باشد، رفتار آن همیشه می‌تواند به عنوان برهم‌نهشی از حالت‌های^{۳۴} با انرژی معین نشان داده شود. انرژی هر حالت مشخصه‌ای از اتم است، و بنابراین الگوی دامنه است که احتمال یافتن ذرات در مکان‌های متفاوت را تعیین می‌کند. حرکت کلی را می‌توان با دادن دامنه هر یک از این حالت‌های انرژی متفاوت توصیف کرد. این منشاء ترازهای انرژی در مکانیک کوانتومی است. از آنجا که مکانیک کوانتومی توسط امواج نشان داده می‌شود، در شرایطی که در آن الکترون انرژی کافی برای اینکه نهایتاً از پروتون فرار کند ندارد، این‌ها امواج جایگزیده هستند. مانند امواج جایگزیده ریسمان، بسامدهای معینی برای جواب معادله موج در مکانیک کوانتومی وجود دارد. تفسیر کوانتوم مکانیکی این است که این‌ها انرژی‌های معین هستند. بنابراین یک سیستم کوانتوم مکانیکی، چون با امواج نشان داده می‌شود، می‌تواند حالت‌های معین انرژی ثابت داشته باشد؛ نمونه‌های آن ترازهای انرژی اتم‌های مختلف هستند.

³³amplitude

³⁴states