

## شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 40

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۴۰

مترجم: سارا زمردی

ویراستار: هانیه آقاخانی

حروف‌چین: علی باقری کوچکسرائی

نسخه‌ی ۱۰۰ تاپستان ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

[www.Zharfa90.ir](http://www.Zharfa90.ir)

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

## فصل ۴۰

# اصول مکانیک آماری

### ۱.۴۰ فشار نمایی

در مورد برخی ویژگی‌های سیستمی که در آن اتم‌ها با یکدیگر برخورد می‌کنند صحبت کرده‌ایم. به این مبحث نظریه جنبشی گفته می‌شود، توصیفی از مواد از دیدگاه برخوردهای بین مولکولی اساساً ادعای ما این است که تعداد زیادی از ویژگی‌های ماده با حرکت اجزای آن قابل توجیه هستند.

در حال حاضر خودمان را به شرایط تعادل گرمایی<sup>۱</sup> که خود زیر مجموعه‌ای از تمام پدیده‌های طبیعی است، محدود می‌کنیم. به آن دسته از قوانین مکانیک که فقط می‌توان آن‌ها را در تعادل گرمایی اعمال کرد، مکانیک آماری<sup>۲</sup> گفته می‌شود. در این بخش می‌خواهیم با برخی قضایای این مبحث آشنا شویم.

تا این جا با یکی از قضایای مکانیک آماری آشنا شده‌ایم: «مقدار میانگین انرژی جنبشی برای هر حرکتی در دمای مطلق  $T$ ، به ازای هر حرکت مستقل» مثلاً: هر درجه آزادی برابر  $\frac{1}{2}kT$  است که درباره متوسط مربع سرعت‌ها<sup>۳</sup> به ما اطلاعاتی می‌دهد. الان هدف ما پیدا کردن اطلاعاتی بیشتر درباره موقعیت اتم‌هاست تا بفهمیم چه تعدادی از آن‌ها در تعادل گرمایی در موقعیت‌های مختلف هستند و در مورد توزیع سرعت‌ها<sup>۴</sup> هم اطلاعات بیشتری بدست آوریم. اگر چه مقدار متوسط مربع سرعت را می‌دانیم، ولی نمی‌دانیم چطور به سوالاتی مثل اینکه چه تعدادی از آن‌ها سه برابر یا یک چهارم جذر متوسط مربع سرعت حرکت می‌کنند جواب دهیم. یا سرعت همه‌ی آن‌ها دقیقاً یکسان است؟

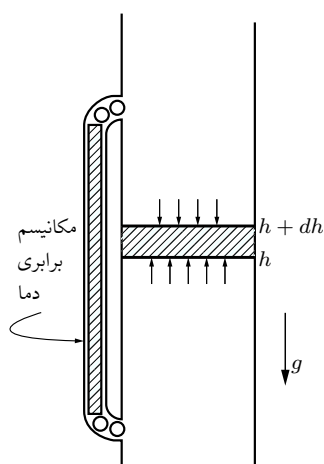
پس سعی می‌کنیم به این دو سوال پاسخ دهیم: (۱) وقتی نیرویی به مولکول‌ها وارد می‌شود، چطور در فضا قرار می‌گیرند؟ و (۲) توزیع سرعت آن‌ها به چه شکل خواهد بود؟

<sup>1</sup>thermal equilibrium

<sup>2</sup>statistical mechanics

<sup>3</sup>mean square velocity

<sup>4</sup>distribution of the velocities



۱.۴۰. اختلاف فشار بین ارتفاع‌های  $h$  و  $h + dh$  به اندازه‌ی وزن گاز بینشان است.

مشخص می‌شود این دو سوال کاملاً مستقل از یکدیگر هستند و توزیع سرعت‌ها همیشه به یک شکل خواهد بود. وقتی فهمیدیم انرژی جنبشی میانگین یکسان است و به نیرویی که به مولکول‌ها وارد می‌شود بستگی ندارد، به این مورد اشاره کرده‌ایم. توزیع سرعت مولکول‌ها مستقل از نیروهای وارد شده است، چون نرخ برخوردها به نیروهای وارد شده بستگی ندارد.

بیایید با یک مثال شروع کنیم: توزیع مولکول‌ها در محیطی مثل جو خودمان، ولی بدون باد و انواع اختلالات دیگر. فرض کنید ستونی از گاز با ارتفاعی زیاد داریم که بر خلاف جو در تعادل گرمایی قرار دارد. می‌دانیم در جو با بالا رفتن ارتفاع، دما کمتر می‌شود. اگر دما در ارتفاع‌های مختلف تفاوت داشت، می‌توانستیم عدم وجود تعادل را با وصل کردن یک میله به گلوله‌هایی در انتهای لوله نشان دهیم. (شکل ۱.۴۰) در آن‌جا گلوله‌ها انرژی  $\frac{1}{2}kT$  را از مولکول‌ها می‌گیرند و از طریق میله، گلوله‌هایی را که در بالا قرار دارند هم تکان می‌دهند و گلوله‌ها هم مولکول‌ها را به حرکت در می‌آورند. پس در نهایت دما در یک میدان گرانشی<sup>۵</sup> در همه ارتفاع‌ها یکی خواهد شد.

اگر دما در همه ارتفاعات یکسان است، مسئله این است که بفهمیم طبق کدام رابطه وقتی به سمت بالا می‌رویم، اتمسفر رقیق‌تر می‌شود. اگر  $N$  تعداد کل مولکول‌ها در حجم  $V$  و فشار  $P$  باشد، می‌دانیم  $PV = NkT$ ، یا  $P = nkT$ ، که در آن  $n = N/V$  تعداد مولکول‌ها در واحد حجم است. به بیانی دیگر، اگر تعداد مولکول‌ها در واحد حجم را بدانیم، فشار را می‌دانیم و برعکس. از آن‌جا که دما در این مسئله ثابت است، این دو با یکدیگر متناسب هستند. ولی فشار ثابت نیست، بلکه باید با کاهش ارتفاع زیاد شود چون به نوعی وزن گاز بالای خود را تحمل می‌کند. این سرنخی است که با آن مشخص می‌کنیم فشار چگونه با ارتفاع تغییر می‌کند. اگر مساحتی به اندازه واحد را در ارتفاع  $h$  در نظر بگیریم، نیروی عمودی وارد

<sup>۵</sup>gravitational field

شده به آن از پایین برابر با فشار  $P$  است. نیروی عمودی بر واحد سطح در ارتفاع  $h + dh$  که آن را به سمت پایین فشار می‌دهد در نبود گرانش برابر همان خواهد بود. ولی اینجا این طور نیست. چون نیرویی که از پایین وارد می‌شود، باید به اندازه وزن گاز محصور بین دو ارتفاع  $h$  و  $h + dh$  از نیروی بالایی بیشتر باشد. نیروی وزن وارد شده به هر مولکول  $mg$  است، که در آن  $g$  شتاب ناشی از گرانش است. و  $ndh$  تعداد کل مولکول‌های گاز در یک قسمت است. با استفاده از این اطلاعات به این معادله دیفرانسیل می‌رسیم:  $P_{h+dh} - P_h = dP = -mgndh$ . چون  $P = nkT$  و دما ثابت است، می‌توانیم  $P$  یا  $n$  را حذف کنیم. فرض کنید  $P$  را حذف کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT} n$$

این معادله دیفرانسیلی است که به ما می‌گوید چگالی چگونه با زیاد شدن انرژی کاهش می‌یابد. پس الآن معادله‌ای برای چگالی ذرات  $n$  داریم که با ارتفاع تغییر می‌کند و مشتق آن با خودش متناسب است. تابعی که مشتق آن با خودش متناسب است تابع نمایی است. پس جواب معادله دیفرانسیل این است:

$$n = n_0 e^{-mgh/kT}. \quad (۱.۴۰)$$

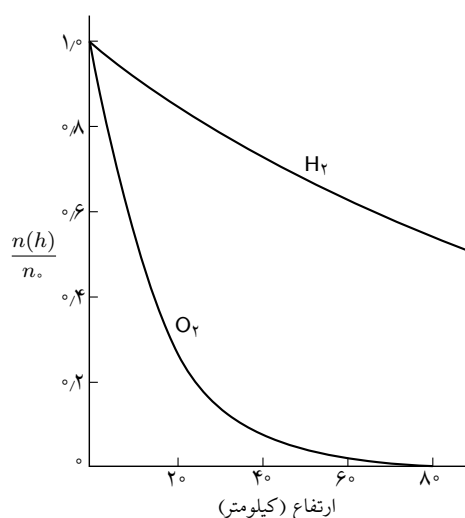
در اینجا ثابت انتگرال‌گیری  $n_0$ ، به وضوح چگالی در ارتفاع  $h = 0$  است (که می‌تواند هر نقطه‌ای انتخاب شود)، و چگالی با افزایش ارتفاع به صورت نمایی کاهش می‌یابد. توجه کنید اگر انواع متفاوتی از مولکول‌ها با جرم‌های مختلف داشتیم، چگالی‌هایشان با توابع نمایی متفاوتی کم می‌شود. چگالی مولکول‌های سنگین‌تر با ارتفاع با نرخ بیشتری کم می‌شود. پس انتظار داریم چون اکسیژن از نیتروژن سنگین‌تر است، وقتی در جو بالا می‌رویم، نسبت مقدار نیتروژن به اکسیژن افزایش یابد. ولی در اتمسفر ما این اتفاق نمی‌افتد، حداقل در ارتفاع‌های معقول اینگونه نیست، چون تلاطم زیادی وجود دارد که گازها را دوباره با هم مخلوط می‌کند و دما در همه قسمت‌های جو یکسان نیست. ضمناً مواد سبک‌تر در ارتفاع‌های بالاتر حضور پررنگ‌تری دارند، چون جرم‌های کمتر هنوز وجود دارند در حالی که دیگر توابع نمایی افت کرده‌اند.

## ۲.۴۰ قانون بولتزمن<sup>۶</sup>

در اینجا باید به این نکته جالب اشاره کنیم که توان تابع نمایی در معادله (۱.۴۰) همان انرژی پتانسیل برای یک اتم است. پس این رابطه را می‌توانیم به این شکل هم بیان کنیم: چگالی در هر نقطه متناسب است با

$$e^{-\text{انرژی پتانسیل هر کدام از اتم‌ها}/kT}$$

<sup>6</sup>The Boltzmann law



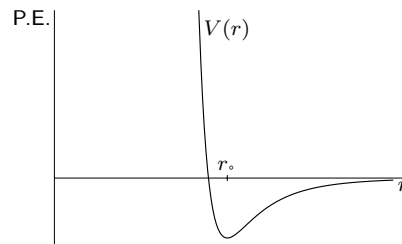
۲.۴۰. چگالی نرمال شده به عنوان تابعی از ارتفاع در میدان گرانشی زمین برای اکسیژن و هیدروژن در دمای ثابت.

این می‌تواند اتفاقی باشد، مثلاً فقط در این حالت که میدان گرانشی یکنواخت است درست باشد، با این حال می‌توان نشان داد این گزاره در حالت‌های کلی‌تر هم درست است. فرض کنید نیرویی به جز نیروی گرانش روی مولکول‌های گاز عمل می‌کند. برای مثال ممکن است مولکول‌ها بار الکتریکی داشته باشند، و به آن‌ها در میدان الکتریکی یا در حضور بار دیگری نیروی الکتریکی وارد شود. یا به دلیل برهمکنش‌های متقابل اتم‌ها با یکدیگر، با دیوار یا با یک جسم جامد یا چیزهای دیگر، یک نیروی جاذبه وجود داشته باشد که به موقعیت مولکول بستگی دارد و روی همه آن‌ها اثر می‌کند. برای سادگی فرض کنید همه مولکول‌ها یکسان هستند و این نیروی همه آن‌ها عمل می‌کند. پس نیرویی که به کل مولکول‌های گاز وارد می‌شود را می‌توان به راحتی از ضرب تعداد مولکول‌ها در نیروی وارد به هر کدام حساب کرد. برای اجتناب از پیچیدگی‌های اضافی، یک دستگاه مختصات انتخاب می‌کنیم که محور  $x$  آن در جهت نیروی  $F$  قرار دارد.

به همان روش قبلی، اگر دو صفحه موازی در گاز در نظر بگیریم که با یکدیگر فاصله  $dx$  دارند، ضرب نیروی وارد شده به هر اتم در تعداد اتم‌ها  $n$  در  $cm^3$  (تعمیم  $nmg$  که قبلاً داشتیم)، در  $dx$ ، باید با تغییرات فشار برابر باشد:  $Fndx = dP = kTdn$ . یا اگر بخواهیم این رابطه را طوری بیان کنیم که بعداً برایمان کاربرد داشته باشد:

$$F = kT \frac{d}{dx} (\ln n). \quad (۲.۴۰)$$

کاری که انجام می‌دهیم تا یک مولکول را از  $x$  به  $x + dx$  ببریم برابر با  $-Fdx$  است. و اگر  $F$  از یک پتانسیل ناشی شده باشد، مثلاً اگر بتوان کار انجام شده را با یک انرژی پتانسیل بیان کرد، آن را می‌توان با تغییر در انرژی پتانسیل ( $P.E.$ ) هم نشان داد. قرینه تغییر دیفرانسیلی انرژی پتانسیل همان کار انجام شده



۳.۴۰. یک تابع پتانسیل برای دو مولکول، که فقط به فاصله‌شان بستگی دارد.

$Fdx$  است. پس به این نتیجه می‌رسیم که  $d(\ln n) = -d(P.E.)/kT$ ، یا بعد از انتگرال‌گیری،

$$n = (\text{ثابت}) e^{-P.E./kT}. \quad (۳.۴۰)$$

پس چیزی که در حالت خاص به آن رسیده بودیم در حالت کلی هم ثابت شد. (ولی اگر نیرو ناشی از یک پتانسیل نباشد چه؟ در آن صورت نمی‌توان معادله (۲.۴۰) را حل کرد. اتم‌ها می‌توانند در مسیرهای دایره‌ای حرکت کنند که کار انجام شده برایشان صفر نیست و نمی‌توان حالت تعادلی داشت. اگر نیروهای خارجی مؤثر بر اتم‌ها پایستار نباشند تعادل گرمایی نمی‌تواند وجود داشته باشد.) معادله (۳.۴۰)، یا قانون بولتزمن، یکی دیگر از اصول مکانیک آماری است که بیان می‌کند احتمال پیدا کردن مولکول‌ها در یک آرایش فضایی مشخص به صورت نمایی با قرینه انرژی پتانسیل آن آرایش تقسیم بر  $kT$  تغییر می‌کند.

از این رابطه می‌توانیم توزیع مولکول‌ها را بدست آوریم: فرض کنید، یک یون مثبت در مایعی داشته باشیم که یون‌های منفی اطرافش را جذب می‌کند. در فواصل متفاوت چه تعدادی از آن‌ها قرار خواهند داشت؟ اگر انرژی پتانسیل تابعی از فاصله باشد پس نسبت آن‌ها در فواصل متفاوت با این رابطه مشخص می‌شود. همچنین از این رابطه در مسائل کاربردی دیگر هم به همین ترتیب استفاده می‌شود.

### ۳.۴۰ تبخیر مایعات

در مباحث پیچیده‌تر از مکانیک آماری افراد سعی در حل این مسئله‌ی مهم دارند: چیدمانی از مولکول‌های را در نظر بگیرید که یکدیگر را جذب می‌کنند، و فرض کنید نیروی بین هر دو مولکول، مثلاً  $i$  و  $j$ ، فقط به فاصله بینشان  $r_{ij}$  بستگی دارد و می‌توان آن را با مشتق یک تابع پتانسیل  $V(r_{ij})$  نمایش داد. شکل ۳.۴۰ شکلی کلی از همچنین تابعی را نشان می‌دهد. برای  $r > r_0$ ، با نزدیک شدن مولکول‌ها به یکدیگر انرژی کاهش می‌یابد، چون یکدیگر را جذب می‌کنند، و وقتی بیشتر به یکدیگر نزدیک می‌شوند، انرژی با شدت زیادی افزایش می‌یابد چون یکدیگر را با شدت دفع می‌کنند که تقریباً می‌توان گفت: این یکی از ویژگی‌های رفتار مولکول‌ها است.

فرض کنید یک جعبه پر از این مولکول داریم و می‌خواهیم بدانیم به طور میانگین با چه آرایشی در آن

قرار دارند. جواب  $e^{-P.E./kT}$  است. انرژی پتانسیل کلی در این حالت برابر با جمع انرژی تمام جفت مولکول‌هاست، با فرض اینکه تمام نیروها به صورت دوتایی هستند. (در مثال‌های پیچیده‌تر ممکن است، سیستم سه تایی نیرو<sup>۷</sup> داشته باشیم، ولی مثلاً در الکتریسیته تمام انرژی‌های پتانسیل به صورت دوتایی هستند.) پس احتمال پیدا کردن مولکول‌ها در فواصل مشخص متناسب است با

$$\exp\left[-\sum_{i,j} V(r_{ij})/kT\right].$$

اگر دما بسیار زیاد باشد، یعنی:  $|V(r_0)| \gg kT$ ، توان تابع نمایی تقریباً همه جا به طور نسبی کوچک است و احتمال پیدا کردن یک مولکول تقریباً از مکان مستقل است. بیایید درباره دو مولکول صحبت کنیم:  $e^{-P.E./kT}$  احتمال پیدا کردن آن‌ها در فواصل متقابل متفاوت<sup>۸</sup>  $r$  است. به وضوح وقتی پتانسیل در منفی‌ترین حالت قرار دارد، احتمال آن بیشتر است. و وقتی پتانسیل به بی‌نهایت میل می‌کند، احتمال تقریباً صفر است که در فواصل بسیار کوچک اتفاق می‌افتد. این یعنی برای هم‌چین اتم‌هایی در یک گاز، هیچ شانس وجود ندارد که اتم‌ها بسیار به هم نزدیک باشند، چون یکدیگر را به شدت دفع می‌کنند. ولی احتمال پیدا کردنشان در واحد حجم در نقطه‌ی  $r_0$  از هر نقطه دیگری بیشتر است. این که به چه میزان بیشتر باشد، به دما وابسته است. اگر دما در مقایسه با تفاوت انرژی بین  $r = \infty$  و  $r = r_0$  بسیار زیاد باشد، تابع نمایی بسیار نزدیک به یک خواهد بود. در این حالت وقتی انرژی جنبشی میانگین (که تقریباً مساوی  $kT$  است) به میزان زیادی از انرژی پتانسیل بیشتر می‌شود و نیروها تفاوت زیادی ایجاد نمی‌کنند. ولی با کاهش دما، احتمال پیدا کردن مولکول‌ها در فواصل کوچکتر از  $r_0$  به تدریج افزایش می‌یابد که با احتمال پیدا کردن آن‌ها در فواصل دیگر هم متناسب است، در واقع اگر  $kT$  بسیار کمتر از  $|V(r_0)|$  باشد، در آن ناحیه توان تابع نسبتاً بزرگ است. به بیان دیگر در یک حجم معین احتمال اینکه در فاصله‌ای قرار گرفته باشند، که انرژی کمینه باشد بیشتر از این است که فاصله‌ی زیادی داشته باشند. با کم شدن دما، اتم‌ها به یکدیگر نزدیک می‌شوند، در توده‌هایی انباشته می‌شوند، و به مایع و جامد و مولکول تبدیل می‌شوند. و وقتی دما را زیاد کنیم، بخار می‌شوند.

برای اینکه دقیقاً بیان کنیم مواد چگونه بخار می‌شوند و در یک شرایط معین دقیقاً چه اتفاقی می‌افتد، باید این موارد را بدانیم. اول، برای پیدا کردن رابطه‌ی درست برای نیروی مولکولی  $V(r)$ ، که باید آن را از راهی دیگر بدست آوریم، مثلاً مکانیک کوانتوم یا آزمایش. ولی با داشتن رابطه‌ی نیروی بین مولکول‌ها، برای فهمیدن اینکه چه تعدادی از مولکول‌ها چه رفتاری نشان می‌دهند فقط باید تابع  $e^{-\sum V_{ij}/kT}$  را بررسی کنیم. به طور غافلگیر کننده‌ای با اینکه از تابع و ایده‌ای ساده استفاده می‌کنیم و تابع پتانسیل را هم داریم، ولی این کار بسیار پیچیده است. سختی این کار در زیاد بودن تعداد متغیرهاست.

با وجود این مشکلات، این مبحث بسیار جالب و هیجان‌انگیز است. معمولاً به آن مسئله‌ی اجسام

<sup>7</sup>three-body forces

<sup>8</sup>mutual distances



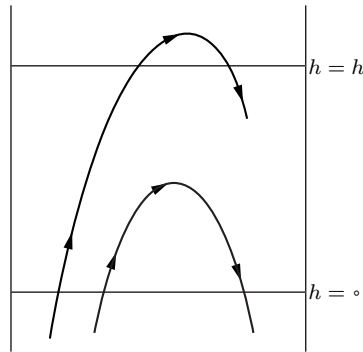
متعدد<sup>۹</sup> گفته می‌شود و همیشه بسیار هم جالب بوده است. همان یک فرمول باید شامل تمام جزئیات مثل جامد شدن گازها، یا شکل کریستال‌هایی که جامدات می‌توانند داشته باشند. افراد زیادی تلاش کرده‌اند تا این فرمول را بدست آورند، ولی پیچیدگی‌های ریاضیاتی ناشی از تعداد زیاد متغیرها بسیار زیاد هستند. پس آن فرمول توزیع ذرات در فضا است. اگر به طور عملی صحبت کنیم، این‌جا کار مکانیک کلاسیک آماری تمام می‌شود، چون اگر نیروها را بشناسیم، باید بتوانیم توزیع مولکول‌ها در فضا و توزیع سرعت‌ها را یک بار و در حالت کلی بدست آوریم چون برای حالت‌های متفاوت تفاوت چندانی ندارند. مشکل بزرگ بدست آوردن اطلاعاتی خاص را از جواب کلی است، و این همان موضوع اصلی مکانیک کلاسیک آماری است.

## ۴.۴۰. توزیع سرعت‌های مولکولی

اکنون در مورد توزیع سرعت‌ها صحبت می‌کنیم چون در بعضی موارد این که بدانیم چه تعدادی از آن‌ها با چه سرعت‌های متفاوتی حرکت می‌کنند جالب و کاربردی است. برای انجام این کار، می‌توانیم از حقایقی که با توجه به گازها در اتمسفر بدست آوردیم استفاده کنیم. فرض می‌کنیم گاز ایده‌آل باشد، همان طور که در نوشتن انرژی پتانسیل هم این فرض را با در نظر نگرفتن برهمکنش متقابل بین اتم‌ها انجام داده‌ایم. در مثال اول تنها انرژی پتانسیلی که در نظر گرفتیم، پتانسیل گرانشی بود. البته اگر نیرویی بین اتم‌ها وجود داشت مسئله پیچیده‌تر می‌شد. پس اول فرض می‌کنیم نیرویی بین اتم‌ها نیست، و برای لحظه‌ای فرض می‌کنیم برخوردی هم بین مولکول‌ها وجود ندارد. و در ادامه این موضوع را توجیه خواهیم کرد. دیدیم که در ارتفاع  $h$  نسبت به ارتفاع  $0$  مولکول‌های کمتری وجود دارد. با توجه به فرمول (۱.۴۰) تعداد مولکول‌ها با ارتفاع به طور نمایی کاهش می‌یابد. چطور ممکن است در ارتفاع‌های بالاتر مولکول کمتری وجود داشته باشد؟ مگر همه‌ی مولکول‌هایی که از ارتفاع  $0$  شروع به حرکت به سمت بالا می‌کنند به ارتفاع  $h$  نمی‌رسند؟ خیر! چون بعضی از مولکول‌هایی که از ارتفاع  $0$  حرکت کرده‌اند آنقدر کند هستند که نمی‌توانند از تپه‌ی پتانسیل تا  $h$  بالا بروند. با این راهنمایی می‌توانیم محاسبه کنیم به ازای هر سرعت چه تعداد مولکول وجود دارد. چون طبق معادله (۱.۴۰) می‌دانیم چه تعداد با سرعت کمتر از سرعت مورد نیاز برای رسیدن به ارتفاع مشخص  $h$  حرکت می‌کنند. این‌ها همان مولکول‌هایی هستند که نشان می‌دهند چگالی در ارتفاع  $h$  کمتر از چگالی در ارتفاع  $0$  است.

حال بیا این ایده را دقیق‌تر بررسی کنیم: بیا بید بشماریم چه تعدادی از مولکول‌ها از پایین به بالای صفحه‌ی  $0 = h$  عبور می‌کنند. (نسبت دادن صفر به این ارتفاع به این معنا نیست که زمینی وجود دارد. این فقط برای سادگی استفاده می‌شود و گاز در ارتفاع‌های منفی هم وجود دارد.) این مولکول‌های گاز در همه‌ی جهات حرکت می‌کنند ولی بعضی از آن‌ها از صفحه رد می‌شوند، و در هر لحظه تعداد مشخصی از آن‌ها در

<sup>9</sup>many-body problem



۴.۴۰. فقط مولکول‌هایی که در ارتفاع  $h = 0$  با سرعتی مناسب حرکت می‌کنند می‌توانند به ارتفاع  $h$  برسند.

ثانیه با سرعت‌های متفاوت از پایین به بالای صفحه می‌روند. حال به این توجه می‌کنیم که اگر  $u$  سرعتی باشد که برای بالا رفتن تا ارتفاع  $h$  لازم است (انرژی جنبشی  $mgh = \frac{1}{2}mu^2$ )، تعداد مولکول‌هایی که در هر ثانیه به سمت بالا در جهت عمودی از صفحه‌ی پایینی عبور می‌کنند و مؤلفه عمودی سرعتشان از  $u$  بیشتر است دقیقاً با تعداد مولکول‌هایی که با هر سرعتی از صفحه بالایی می‌گذرند برابر است. مولکول‌هایی که سرعت عمودی‌شان از  $u$  بیشتر نیست نمی‌توانند از صفحه بالایی عبور کنند. در نتیجه می‌بینیم که:

$$\text{تعداد عبور } h = 0 \text{ با } u > v_z = \text{تعداد عبور } h = h \text{ با } v_z > 0.$$

ولی تعدادی که از ارتفاع  $h$  با سرعت‌های بیشتر از  $0$  می‌گذرند از تعدادی که از ارتفاعی پایین‌تر و با سرعت‌های بیشتر از  $0$  می‌گذرند کمتر است، چون تعداد اتم‌ها بیشتر است و این تمام چیزی است که برای محاسبه به آن نیاز داریم. بعد از بحثی که قبلاً در مورد ثابت بودن دما در همه جای جو کردیم، می‌دانیم که توزیع سرعت‌ها یکنواخت است. پس می‌توان گفت: چون توزیع سرعت‌ها یکنواخت است و تعداد اتم بیشتری در ارتفاع‌های پایین‌تر وجود دارد، نسبت تعداد اتم‌هایی که با سرعت مثبت از ارتفاع  $h$  می‌گذرند،  $n_{>0}(h)$ ، به تعداد اتم‌هایی که با سرعت مثبت از ارتفاع  $0$  می‌گذرند،  $n_{>0}(0)$ ، مساوی با نسبت ارتفاع‌ها است که همان  $e^{-mgh/kT}$  می‌باشد. ولی  $n_{>u}(0) = n_{>0}(h)$  پس متوجه می‌شویم:

$$\frac{n_{>u}(0)}{n_{>0}(0)} = e^{-mgh/kT} = e^{-mu^2/2kT},$$

چون  $\frac{1}{2}mu^2 = mgh$  است. پس به بیانی دیگر تعداد مولکول‌ها در واحد سطح که در واحد زمان از ارتفاع  $0$  می‌گذرند و مؤلفه  $z$  سرعتشان از  $u$  بیشتر باشد، حاصل ضرب  $e^{-mu^2/2kT}$  در تعداد کل مولکول‌هایی است که از صفحه با سرعت بیشتر از  $0$  می‌گذرند.

این فقط در ارتفاع دلخواه  $0$  درست نیست، بلکه در هر ارتفاعی درست است. در نتیجه توزیع سرعت‌ها در همه جا یکسان است. (جمله‌ی آخر شامل ارتفاع  $h$  که فقط در بحث‌های میانی ظاهر شد نمی‌شود).

نتیجه یک گزاره کلی است که توزیع سرعت را به ما نمایش می‌دهد و بیان می‌کند اگر در دیواره‌ی یک لوله گاز سوراخ بسیار کوچکی ایجاد کنیم تا برخوردها در آن میان بسیار کم و دور از یکدیگر باشند، مثلاً فاصله‌ی بین برخوردها بیشتر از قطر سوراخ باشد، مولکول‌هایی که از سوراخ بیرون می‌آیند سرعت‌های متفاوتی خواهند داشت ولی کسری از مولکول‌ها که سرعتی بیشتر از  $u$  دارند  $e^{-mu^2/2kT}$  است.

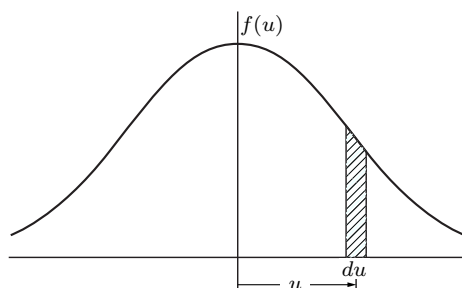
حال به سوالی که مربوط به صرف‌نظر کردن از تأثیر برخوردها بود برمی‌گردیم. چرا تفاوتی ایجاد نمی‌کند؟ می‌توانستیم همین روند را پیش بگیریم، ولی نه در یک ارتفاع محدود  $h$ ، بلکه در یک ارتفاع بی‌نهایت کوچک  $h$ ، که آنقدر کوچک باشد که فضایی برای برخوردها بین  $h$  و  $h$  وجود نداشته باشد. ولی این کار لازم نبود: این بحث ظاهراً در مورد تحلیل انرژی‌های سیستم، بقای انرژی و برخوردهایی است که بین مولکول‌ها صورت می‌گیرد و باعث تبادل انرژی می‌شود. اگرچه ما به این اهمیت نمی‌دهیم که آیا داریم همان مولکول را دنبال می‌کنیم در حالی که انرژی آن با مولکولی دیگر تبادل می‌شود. پس معلوم می‌شود حتی اگر مسئله با دقتی بیشتر تحلیل می‌شد (که طبیعتاً کاری بسیار سخت تر بود) در نتیجه تأثیری نمی‌گذاشت. این جالب است که توزیع سرعتی که پیدا کرده‌ایم فقط برابر است با

$$n_{>u} \propto e^{-\text{انرژی جنبشی}/kT}. \quad (۴.۴۰)$$

این روش بیان توزیع سرعت، یعنی بیان کردن تعداد مولکول‌هایی که از یک سطح معلوم با یک حداقل سرعت مشخص می‌گذرند، بهترین روش برای بیان توزیع سرعت نیست. برای مثال درون یک گاز، اکثراً می‌خواهیم تعداد مولکول‌هایی را بدانیم که سرعت عمودی‌شان بین دو مقدار مشخص است و مسلماً این از معادله (۴.۴۰) بدست نمی‌آید. ما علاقه داریم نتیجه‌ای که بدست آورده‌ایم را به روشی معمول‌تر بیان کنیم، با اینکه معادله‌ای که قبلاً نوشته‌ایم الان هم بسیار کلی است. توجه کنید که ممکن نیست که بگوییم یک مولکول دقیقاً سرعتی مشخص دارد. هیچ کدام از آن‌ها سرعتی دقیقاً برابر با  $۱۷۹۶۲۸۹۹۱۷۳$  متر بر ثانیه ندارند. پس برای اینکه عبارتی با معنی به کار ببریم، باید پرسیم چه تعدادی سرعتشان در یک محدوده مثلاً بین  $۱۷۹۶$  و  $۱۷۹۷$  قرار می‌گیرد. به بیان ریاضی، اگر  $f(u)du$  نسبت تمام مولکول‌ها با سرعت بین  $u$  و  $u + du$  به کل مولکول‌ها باشد، یا به طور معادل با فرض اینکه  $du$  بسیار کوچک باشد، آن‌هایی که سرعتشان در فاصله‌ی  $du$  از  $u$  است. شکل ۵.۴۰ شکلی ممکن برای تابع  $f(u)$  را نشان می‌دهد و قسمت هاشور خورده به عرض  $du$  و ارتفاع میانگین  $f(u)$ ، بیانگر  $f(u)du$  برای این تابع است. نسبت این مساحت هاشور خورده به کل مساحت هاشور خورده برابر با نسبتی از مولکول‌هاست که سرعتشان در فاصله‌ی  $du$  از  $u$  قرار دارد. اگر  $f(u)$  را طوری تعریف کنیم تا نسبتی که دارای سرعت مورد نظرمان هستند به طور مستقیم با مساحت هاشور خورده تعریف شود، کل مساحت باید صد درصد مولکول‌ها باشد. یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = 1. \quad (۵.۴۰)$$

اکنون باید این توزیع را با نظریه‌ای که قبلاً بدست آوردیم، مقایسه کنیم. اول می‌پرسیم تعداد مولکول‌هایی که در هر ثانیه از مساحتی با سرعتی بیشتر از  $u$  می‌گذرند، اگر



۵.۴۰. یک تابع توزیع سرعت. ناحیه‌ی هاشور خورده  $f(u)du$  است، نسبتی از ذرات که سرعت‌هایی در بازه‌ای با شعاع  $du$  و مرکز  $u$  دارند.

بخواهیم با  $f(u)$  بیان کنیم چقدر است. در ابتدا ممکن است فکر کنیم جواب فقط انتگرال  $\int_u^\infty f(u)du$  است، ولی این طور نیست. چون ما تعدادی را می‌خواهیم که در هر ثانیه از مساحت مورد نظر عبور می‌کنند. مولکول‌های سریعتر بیشتر از مولکول‌های کندتر عبور می‌کنند و برای اینکه بیان کنیم چه تعداد رد می‌شوند، باید آن مقدار را در سرعت ضرب کنیم. (ما این موضوع را در فصل قبل وقتی در مورد تعداد برخوردها صحبت می‌کردیم بررسی کردیم.) در زمان مشخص  $t$  تعداد کلی که از سطح عبور می‌کنند برابر با همه‌ی آن‌هایی است توانسته‌اند به صفحه برسند و آن مولکول‌ها از فاصله‌ی  $ut$  به صفحه رسیده‌اند. پس نمی‌توان به سادگی گفت مولکول‌هایی که به صفحه رسیده‌اند همان‌هایی هستند که در نزدیکی صفحه قرار دارند. بلکه تعدادشان از ضرب تعداد مولکول‌ها در واحد حجم در فاصله‌ای باید جارو کنند تا به صفحه‌ی مورد نظر برسند بدست می‌آید. که این فاصله با  $u$  متناسب است. پس ما به انتگرال  $u$  در  $f(u)du$  نیاز داریم که یک انتگرال نامتناهی با کران پایین  $u$  است. جواب این انتگرال باید همانی باشد که قبلاً بدست آوردیم،  $e^{-mu^2/2kT}$ ، با یک ضریب تناسب که بعداً آن را بدست می‌آوریم:

$$\int_u^\infty u f(u) du = \text{ثابت} \cdot e^{-mu^2/2kT}. \quad (۶.۴۰)$$

حال از انتگرال نسبت به  $u$  مشتق می‌گیریم و به عبارت داخل انتگرال می‌رسیم (با یک علامت منفی چون  $u$  کران پایین است) و اگر از طرف دیگر هم مشتق بگیریم، به ضرب  $u$  در همان تابع نمایی (و همان ثوابت) می‌رسیم.  $u$  از دو طرف ساده می‌شود و به این نتیجه می‌رسیم:

$$f(u) du = C e^{-mu^2/2kT} du. \quad (۷.۴۰)$$

$du$  را در دو طرف نکه می‌داریم تا یادمان بماند این یک عبارت برای توزیع سرعت‌هاست، و نسبت را بین سرعت‌های  $u$  و  $u + du$  به ما می‌گوید.

ثابت  $C$  باید مشخص شود تا طبق معادله (۵.۴۰) جواب انتگرال یک باشد. حالا می‌توانیم ثابت کنیم\*

که

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

با استفاده از این موضوع به سادگی می‌توانیم مقدار  $C$  را بدست آوریم:  $C = \sqrt{m/2\pi kT}$ . چون سرعت و تکانه با یکدیگر متناسب هستند، ممکن است بگوییم توزیع تکانه هم با  $e^{-K.E./kT}$  در واحد تغییرات تکانه، متناسب است. مشخص می‌شود این فرضیه در نگاه نسبیتی هم درست است اگر روابط را برحسب تکانه نوشته باشیم. ولی اگر عبارات را با سرعت نوشته باشیم درست نیست. پس بهتر است به جای سرعت با تکانه معادلات را بررسی کنیم:

$$f(p) dp = C e^{-K.E./kT} dp. \quad (۸.۴۰)$$

پس می‌فهمیم احتمال برای حالت‌های متفاوت برای انرژی، جنبشی و پتانسیل، با رابطه‌ی  $e^{-/kT}$  مشخص می‌شود، که یک راه بسیار ساده برای به خاطر سپردن آن و یک عبارت بسیار زیباتر است. تا این جا فقط توزیع سرعت‌ها را داریم، ولی تنها سرعت عمودی آن‌ها. ممکن است بپرسیم احتمال اینکه یک مولکول در جهتی دیگر حرکت کند چقدر است؟ قطعاً توزیع‌ها مرتبط هستند و می‌توانیم توزیع کامل سرعت‌ها را از اطلاعاتی که الان داریم بدست آوریم، چون توزیع کامل فقط به مربع بزرگی سرعت بستگی دارد و نه مؤلفه‌ی  $z$  آن. باید مستقل از جهت باشد. پس فقط همان یک تابع، احتمال وجود اندازه سرعت‌های متفاوت، را در نظر می‌گیریم. ما توزیع مؤلفه‌ی  $z$  را داریم، پس می‌توانیم توزیع مؤلفه‌های دیگر را از آن بدست آوریم. از این کار نتیجه می‌گیریم که احتمال هنوز با  $e^{-K.E./kT}$  متناسب است، ولی اینجا انرژی جنبشی شامل سه قسمت می‌شود:  $mv_x^2/2$ ،  $mv_y^2/2$ ،  $mv_z^2/2$ ، که در توان تابع نمایی با یکدیگر جمع می‌شوند. یا می‌توانیم آن را به صورت یک حاصل ضرب بنویسیم:

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \propto e^{-mv_x^2/2kT} \cdot e^{-mv_y^2/2kT} \cdot e^{-mv_z^2/2kT} dv_x dv_y dv_z. \quad (۹.۴۰)$$

\* برای بدست آوردن مقدار انتگرال باید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

سپس

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx,$$

که دو برابر مقدار انتگرال روی کل صفحه‌ی  $xy$  است. ولی می‌توان آن را در مختصات قطبی هم به شکل زیر نوشت

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot 2\pi r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \pi.$$

می‌توانید ببینید که این فرمول باید درست باشد، اول اینکه فقط تابعی از  $v^2$  است، همان طور که می‌خواستیم و دوم اینکه احتمال وجود مقادیر متفاوت  $v_z$  که از انتگرال‌گیری روی  $v_x$  و  $v_y$  بدست می‌آیند فقط رابطه‌ی (۷.۴۰) است؛ ولی این تابع (۹.۴۰) می‌تواند هر دو کار را انجام دهد.

## ۵.۴۰ گرمای ویژه گازها

حالا باید روش‌های متفاوت برای آزمایش کردن نظریه را بررسی کنیم و ببینیم نظریه‌ی کلاسیک گازها چقدر موفق است. قبلاً دیدیم که اگر  $U$  انرژی داخلی برای  $N$  مولکول باشد، ممکن است رابطه‌ی  $PV = (\gamma - 1)U = NkT$  گاهی برای بعضی گازها برقرار باشد. اگر گاز تک‌اتمی باشد می‌دانیم این عبارت با  $\frac{5}{2}$  انرژی جنبشی مرکزجرم اتم‌ها هم برابر است. و در یک مولکول تک‌اتمی، انرژی جنبشی با انرژی داخلی برابر می‌شود و در نتیجه  $\frac{5}{2} = \gamma - 1$ . ولی فرض کنید مولکول پیچیده‌تری داشته باشیم که بتواند بچرخد و حرکت ارتعاشی داشته باشد. بیایید فرض کنیم (که طبق مکانیک کلاسیک فرض درستی است) که انرژی‌های ناشی از حرکت‌های داخلی هم با  $kT$  متناسب هستند. در این صورت مولکول در یک دمای مشخص، علاوه بر انرژی جنبشی  $\frac{5}{2}kT$ ، انرژی‌های ناشی از ارتعاش‌های داخلی و حرکت‌های چرخشی هم دارد. پس  $U$  شامل انرژی جنبشی و انرژی‌های چرخشی و ارتعاشی هم می‌شود و مقدار متفاوتی برای  $\gamma$  بدست می‌آوریم. در واقع بهترین راه برای اندازه گرفتن  $\gamma$ ، اندازه‌گیری گرمای ویژه است، که همان تغییرات در انرژی با تغییرات دما می‌باشد. بعداً به این رویکرد بازمی‌گردیم. برای هدف کنونی‌مان، فرض می‌کنیم  $\gamma$  با آزمایش از نمودار  $PV^\gamma$  برای انقباض بی‌دررو بدست می‌آید.

بیایید برای بعضی حالات، محاسباتی برای بدست آوردن  $\gamma$  انجام دهیم. می‌دانیم برای یک گاز تک‌اتمی  $U$  کل انرژی است، که برابر انرژی جنبشی است، و می‌دانیم  $\gamma$  باید  $\frac{5}{2}$  باشد. برای یک گاز دو اتمی، مثلاً می‌توان اکسیژن، هیدروژن یدید و هیدروژن و... را در نظر گرفت. فرض کنید بتوان یک مولکول دو اتمی گاز را با دو اتم که با نیرویی مثل نیروی نشان داده شده در شکل ۳.۴۰ کنار هم قرار گرفته‌اند مشخص کرد. همچنین فرض می‌کنیم، که در دماهایی که برای مولکول‌های دو اتمی مورد نظر ماست هر دو اتم به شدت تمایل دارند در فاصله‌ی  $r$  از یکدیگر قرار گیرند، فاصله‌ای که در آن پتانسیل کمترین مقدار ممکن را دارد، که مشخص می‌شود این فرض هم کاملاً درست است. اگر درست نباشد، اگر احتمالات به اندازه‌ی کافی متنوع نباشند تا تراکم مولکول‌ها در انتهای ظرف زیاد باشد، باید به خاطر داشته باشیم که گاز اکسیژن مخلوطی از مولکول‌های اکسیژن و نسبتی کوچک اما با اهمیت از اتم‌های اکسیژن است. می‌دانیم در واقع تعداد بسیار کمی اتم اکسیژن وجود دارد. یعنی همان طور که دیده‌ایم، حداقل مقدار انرژی پتانسیل از  $kT$  بسیار بیشتر است. از آن جا که به شدت اطراف  $r$  تجمع کرده‌اند، فقط به قسمتی از نمودار نیاز داریم که نزدیک مینیمم قرار گرفته است، که می‌توان آن را با یک سهمی تقریب زد. یک پتانسیل سهموی نشان دهنده‌ی یک نوسانگر هماهنگ است، و در واقع با یک تقریب بسیار خوب می‌توان گفت دو اتم در مولکول

اکسیژن با فنر به یکدیگر متصل هستند.

انرژی کل این مولکول در دمای  $T$  چقدر است؟ می دانیم برای هر کدام از این دو اتم هر کدام از انرژی های جنبشی باید  $\frac{3}{2}kT$  باشد، پس انرژی جنبشی برای هر دوشان  $\frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT$  می شود. می توان از دیدی دیگر هم مسئله را بررسی کرد. همان جمع  $\frac{3}{2}$  و  $\frac{3}{2}$  می تواند جمع انرژی مرکزجرم ( $\frac{3}{2}$ )، انرژی جنبشی حرکت چرخشی ( $\frac{3}{2}$ ) و انرژی جنبشی حرکت ارتعاشی ( $\frac{1}{2}$ ) باشد. می دانیم انرژی جنبشی حرکت ارتعاشی  $\frac{1}{2}$  است چون مسئله را فقط در یک بعد بررسی می کنیم، و می توان به هر درجه آزادی  $\frac{1}{2}kT$  انرژی نسبت داد. دو حرکت مستقل چرخشی وجود دارد، چون مولکول می تواند حول هر دو محور بچرخد. فرض می کنیم اتم ها نقاطی هستند که نمی توانند حول خط واصلشان بچرخند، این چیزی است که باید در ذهن داشته باشیم، چون اگر جایی به شکل برخورداریم شاید مشکل از این جا باشد. ولی انرژی پتانسیل حرکت لرزشی و مقدار آن را هم باید بررسی کنیم. در یک نوسانگر هماهنگ، انرژی جنبشی میانگین و انرژی پتانسیل میانگین برابر هستند. در نتیجه انرژی پتانسیل حرکت لرزشی هم  $\frac{1}{2}kT$  است. مجموع همه ی انرژی هایی که در موردشان حرف زدیم  $U = \frac{7}{2}kT$  است. یا به عبارتی  $kT$  برابر  $\frac{2}{7}U$  به ازای هر اتم است. پس به این معنی است که  $\gamma$  به جای  $\frac{5}{2}$ ،  $\frac{9}{2}$  است. یا  $\gamma = 1.286$ .

باید این اعدادی را که بدست آوردیم را با مقادیر اندازه گیری شده که در جدول ۱.۴۰ آورده ایم، مقایسه کنیم. اول هلیوم را که گازی تک اتمی است بررسی می کنیم. مقدار اندازه گیری شده بسیار نزدیک به  $\frac{5}{2}$  است و احتمالاً خطا ناشی از اندازه گیری است. اگر چه در چنین دمای پایینی ممکن است بین اتم ها نیروهایی وجود داشته باشد. کریپتون و آرگون که تک اتمی هستند هر دو در آزمایش با دقت خوبی اندازه گیری می شوند.

به اتم های دو اتمی باز می گردیم و می بینیم مقدار اندازه گیری شد برای هیدروژن  $1.40$  است. این با مقداری که نظریه پیش بینی کرده  $1.286$  هماهنگی ندارد. برای اکسیژن  $1.399$  است که بسیار نزدیک است ولی هنوز تطابق ندارد. برای هیدروژن یخیده هم بسیار نزدیک به  $1.40$  است. کم کم این طور به نظر می رسد که ممکن است جواب درست  $1.40$  باشد، ولی این طور نیست. چون اگر به برم و ید نگاه کنیم اعداد  $1.32$  و  $1.3$  را می بینیم. چون  $1.3$  به اندازه ای منطقی به  $1.286$  نزدیک است، می توان گفت ید به خوبی با نظریه هماهنگی دارد ولی اکسیژن بسیار متفاوت است. پس به یک وضعیت پیچیده برمی خوریم. برای یک مولکول توانستیم درست پیش بینی کنیم ولی برای دو مولکول درست نبود و احتمالاً باید کمی خلاقیت به خرج دهیم تا بتوانیم هر دو وضعیت را توجیه کنیم.

بیا ببینیم به مولکول هایی پیچیده تر با بخش های بیشتر نگاهی بیندازیم. مثلاً  $C_2H_6$  که همان اتان است. اتان هشت اتم متفاوت دارد که هر کدام به حالت های مختلف حرکت های لرزشی و چرخشی دارند. پس کل انرژی داخلی باید تعداد زیادی از  $kT$  ها باشد، حداقل  $12kT$  فقط برای انرژی جنبشی، و  $1 - \gamma$  باید بسیار به صفر نزدیک باشد یا  $\gamma$  باید تقریباً یک باشد. ولی در واقع مقدار آن کمتر است. اما  $1.22$  خیلی کمتر نیست و حتی از  $1.13$  که با محاسبه برای انرژی جنبشی بدست آمده بیشتر است. و این قابل درک نیست.

## جدول ۱۰۴۰

مقادیر  $\gamma$  برای گازهای متفاوت

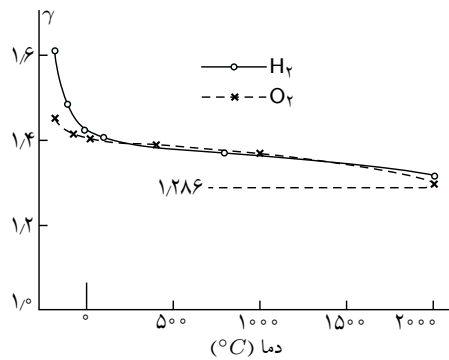
گاز	$T(^{\circ}C)$	$\gamma$
He	-۱۸۰	۱٫۶۶۰
Kr	۱۹	۱٫۶۸
Ar	۱۵	۱٫۶۶۸
H <sub>۲</sub>	۱۰۰	۱٫۴۰۴
O <sub>۲</sub>	۱۰۰	۱٫۳۹۹
HI	۱۰۰	۱٫۴۰
Br <sub>۲</sub>	۳۰۰	۱٫۳۲
I <sub>۲</sub>	۱۸۵	۱٫۳۰
NH <sub>۳</sub>	۱۵	۱٫۳۱۰
C <sub>۲</sub> H <sub>۶</sub>	۱۵	۱٫۲۲

علاوه بر این، این معما عمیق‌تر است، چون مولکول‌های دو اتمی را نمی‌توان با حدی مشخص محدود کرد. اگر اتصالات بین اتم‌ها را کاملاً سفت کنیم، اگرچه میزان ارتعاشات زیاد نیست، ولی به لرزش ادامه می‌دهد. انرژی لرزشی داخلی چون به قدرت اتصال بستگی ندارد هنوز  $kT$  است. ولی اگر می‌توانستیم فرض کنیم پیوند کاملاً محکم شده است، تا هم‌ای ارتعاشات متوقف شوند و یک متغیر کم شود، به این نتیجه می‌رسیم که برای مولکول دو اتمی  $U = \frac{5}{2}kT$  و  $\gamma = ۱٫۴۰$  است. این نتیجه برای هیدروژن و اکسیژن به نظر درست می‌رسد. از طرفی هنوز مشکلاتی داریم، چون  $\gamma$  برای هیدروژن و اکسیژن با دما متغیر است. با توجه به مقادیر اندازه‌گیری شده که در شکل ۶.۴۰ نشان داده شده است، می‌بینیم که  $\gamma$  برای هیدروژن از ۱٫۶ در دمای  $۱۸۵^{\circ}C$  تا  $۱۳$  در دمای  $۲۰۰۰^{\circ}C$  تغییر می‌کند. در مولکول هیدروژن ارتعاش نسبت به اکسیژن قابل توجه‌تر است. ولی حتی در اکسیژن  $\gamma$  با کاهش دما افزایش می‌یابد.

## ۶.۴۰ شکست فیزیک کلاسیک

در یک جمع بندی کلی می‌توانیم بگوییم در بعضی نکات به مشکل می‌خوریم. می‌توانیم از نیروی دیگری به جز نیروی فنر استفاده کنیم ولی مشخص می‌شود هر چیزی فقط مقدار  $\gamma$  را زیاد می‌کند. اگر انواع بیشتری از انرژی را در نظر بگیریم،  $\gamma$  به یک نزدیک‌تر می‌شود، که این با شواهد در تناقض است. به هر چیز دیگری در فیزیک کلاسیک نظری هم که فکر کنیم، فقط قضیه را بدتر می‌کند. حقیقت این است که در هم اتم





۶۰۶. مقادیر تجربی برای  $\gamma$  به عنوان تابعی از دما برای هیدروژن و اکسیژن. فیزیک کلاسیک  $\gamma = 1.286$  را پیش بینی می‌کند که مستقل از دماست.

الکترون وجود دارد. و از این دید می‌دانیم که حرکت‌های داخلی هم وجود دارند. هر الکترون باید حداقل  $\frac{1}{2}kT$  انرژی جنبشی و مقداری انرژی پتانسیل داشته باشند. وقتی با هم جمع می‌کنیم  $\gamma$  کوچکتر می‌شود. که این خنده‌دار و غلط است!

اولین مقاله‌ی مهم در زمینه‌ی نظریه دینامیکی گازها را ماکسول<sup>۱۰</sup> در سال ۱۸۵۹، بر اساس مواردی که تا کنون توضیح می‌داده‌ایم نوشت. او توانست به دقت روابطی مثل رابطه‌ی بویل، نظریه‌ی نفوذ، چگالی گازها، و مواردی دیگر که در فصل آینده در موردشان بحث خواهیم کرد، را توضیح دهد. او همه‌ی این موفقیت‌های بزرگ را در یک خلاصه‌ی نهایی جمع‌آوری کرد و در پایان گفت: ”بالاخره، با بیان روابط لازم بین حرکات انتقالی و چرخشی برای همه‌ی ذرات غیرکروی (او در مورد نظریه‌ی  $\frac{1}{2}kT$  حرف می‌زند). ثابت کردیم سیستمی که شامل این ذرات است، اصلاً نمی‌تواند رابطه‌ی مورد نظر بین دو گرمای ویژه را برقرار کند.“ او به  $\gamma$  اشاره می‌کند (که بعداً خواهیم دید یکی از دو روش اندازه‌گیری گرمای ویژه است). ماکسول می‌گوید می‌دانیم که نمی‌توانیم به جواب درست برسیم.

ماکسول ده سال بعد در یک سخنرانی گفت: ”من اکنون چیزی را که فکر می‌کنم بزرگترین مشکلی است که فیزیک کلاسیک با آن مواجه شده پیش روی شما می‌گذارم.“ این کلمات بیانگر اولین اکتشافی است که بیان می‌کند قوانین فیزیک کلاسیک نادرست است. این اولین نشانه‌ای بود که بیان می‌کرد چیزی به صورت بنیادی غیرممکن است. چون یک نظریه که به دقت اثبات شده با آزمایش تطابق ندارد. حدود سال ۱۹۰۵ جیمز هاپوود جینز<sup>۱۱</sup> و لرد ریلی (جان استرات)<sup>۱۲</sup> دوباره در مورد این معما صحبت کردند. اغلب می‌شنویم فیزیکدان‌ها در اواخر قرن نوزدهم فکر می‌کردند تمام قوانین مهم فیزیکی را می‌دانند و تنها کاری که باید انجام دهند این است که دقت محاسبه‌شان را بیشتر کنند. ممکن است کسی این را گفته باشد و دیگران از او تقلید کرده باشند. ولی با خواندن کتاب‌های آن دوران می‌توان فهمید همگی در مورد موضوعی نگران

<sup>10</sup>Maxwell

<sup>11</sup>Sir James Hopwood Jeans

<sup>12</sup>Lord Rayleigh (John William Strutt)

بودند. جینز در مورد این معما گفته بود این پدیده‌ای مبهم است. به نظر می‌رسد وقتی دما کم می‌شود، انواع خاصی از حرکت متوقف می‌شوند.

اگر می‌توانستیم فرض کنیم که حرکت لرزشی در دماهای پایین وجود ندارد و در دماهای بالا وجود دارد، می‌توانستیم فرض کنیم گازی ممکن است در دمایی وجود داشته باشد که به اندازه‌ی کافی کم است و حرکات ارتعاشی در آن اتفاق نمی‌افتد. پس  $\gamma = 1/40$ ، یا در یک دمای بالاتر مقدار  $\gamma$  کمتر می‌شود. می‌توان همین بحث را برای چرخش هم انجام داد. اگر بتوانیم چرخش را از بین ببریم، مثلاً بگوییم در دمایی که به اندازه‌ی کافی پایین است چرخششان متوقف می‌شود، می‌توانیم بفهمیم که  $\gamma$  برای هیدروژن با کاهش دما به  $1/66$  نزدیک می‌شود. چطور می‌توانیم همچین پدیده‌ای را توجیه کنیم؟ قطعاً متوقف شدن این حرکات را نمی‌توان با مکانیک کلاسیک درک کرد. ولی بعد از کشف مکانیک کوانتوم این مسئله توجیه شد.

بدون اثبات، نتایج مکانیک آماری نظریه‌ی مکانیک کوانتوم را بیان می‌کنیم. از مکانیک کوانتوم به یاد داریم سیستمی که توسط پتانسیلی، مثلاً برای ارتعاشات، مقید شده باشد، مجموعه‌ای گسسته از سطوح انرژی، یا ترازهای مختلف انرژی خواهد داشت. حال سوال اینجاست: مکانیک آماری طبق نظریه‌ی مکانیک کوانتوم چگونه اصلاح می‌شود؟ بسیار جالب است که مشخص می‌شود با وجود اینکه بسیاری از مسائل در مکانیک کوانتوم بسیار پیچیده‌تر هستند، مسائل مکانیک آماری ساده‌تر می‌شوند. جواب ساده‌ای که در مکانیک کلاسیک پیدا کرده بودیم،  $n = n_0 e^{-E/kT}$ ، تبدیل به این نظریه‌ی بسیار مهم می‌شود: اگر انرژی‌های مربوط به حالت‌های مولکولی  $E_0, E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$  باشند، در تعادل گرمایی احتمال پیدا کردن یک مولکول در تراز انرژی مشخص  $E_i$  با  $e^{-E_i/kT}$  متناسب است. این عبارت وجود مولکول در حالات مختلف را بیان می‌کند. به بیان دیگر شانس نسبی یا احتمال اینکه مولکول در تراز  $E_1$  باشد نسبت به اینکه مولکول در تراز  $E_0$  باشد

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}}, \quad (10.40)$$

است. که مشخصاً برابر است با:

$$n_1 = n_0 e^{-(E_1 - E_0)/kT}, \quad (11.40)$$

چون  $P_0 = n_0/N$  و  $P_1 = n_1/N$  پس احتمال اینکه در تراز بالاتری از انرژی باشیم بیشتر از آن است که در تراز انرژی کمتری باشیم. نسبت تعداد اتم‌ها در تراز بالاتر به نسبت تعداد اتم‌ها در تراز پایین‌تر برابر  $e$  به توان قرینه‌ی اختلاف انرژی تقسیم بر  $kT$  است. گزاره‌ای بسیار ساده.

مشخص می‌شود برای یک نوسان‌گر هماهنگ سطوح انرژی به طور یکنواخت قرار گرفته‌اند. اگر کمترین سطح انرژی را  $E_0 = 0$  بنامیم (که مقدار آن در واقع صفر نیست و کمی تفاوت دارد. ولی اگر همه‌ی انرژی‌ها را به مقداری ثابت جابه‌جا کنیم ایرادی ندارد). اولین سطح انرژی  $E_1 = \hbar\omega$  می‌شود، و دومی  $2\hbar\omega$  است و به همین ترتیب برای سطوح بعدی ادامه می‌دهیم.

بیا باید بررسی کنیم چه اتفاقی می افتد. فرض کنید که ارتعاشات یک مولکول دو اتمی را بررسی می کنیم، که آن را با تقریب یک نوسانگر هماهنگ در نظر می گیریم. این سوال را می پرسیم که احتمال نسبی پیدا کردن مولکولی در تراز  $E_1$  به جای تراز  $E_0$  چقدر است؟ پاسخ این است که احتمال اینکه مولکول در تراز  $E_1$  باشد نسبت به اینکه در تراز  $E_0$  باشد به صورت  $e^{-\hbar\omega/kT}$  کاهش می یابد. فرض کنید  $kT$  بسیار از  $\hbar\omega$  کمتر است، و در شرایطی هستیم که دما پایین است. در این صورت احتمال وجود داشتن آن در تراز  $E_1$  بسیار کم است. تمام اتم ها عملاً در تراز  $E_0$  قرار دارند. اگر دما را تغییر دهیم اما هنوز بسیار کوچک باشد، احتمال وجود مولکول در تراز  $E_1 = \hbar\omega$  بسیار کوچک باقی می ماند، و انرژی نوسانگر نزدیک صفر بسیار کوچک باقی می ماند و با دما تغییر زیادی نمی کند چون دما خیلی از  $\hbar\omega$  کمتر است. همه ی نوسانگرها در تراز پایینی هستند و همه ی حرکاتشان متوقف شده است و این تأثیری هم در گرمای ویژه ندارد. پس می توانیم از جدول ۱.۴۰ تشخیص دهیم که  $kT$  در دمای  $100$  درجه سانتی گراد یا  $373$  کلوین، بسیار کمتر از انرژی ارتعاشی در مولکول های اکسیژن یا هیدروژن است، ولی نه در مولکول ید. دلیل این تفاوت این است که اتم ید در مقایسه با هیدروژن سنگین تر است، و با اینکه می توان نیروها را در ید و هیدروژن مقایسه کرد، مولکول ید به اندازه ای سنگین است که فرکانس طبیعی لرزش آن در مقایسه با فرکانس طبیعی هیدروژن بسیار کمتر است. در دمای اتاق  $\hbar\omega$  از  $kT$  برای هیدروژن بیشتر است، ولی برای ید کمتر است و فقط ید انرژی ارتعاشی دارد. وقتی دمای گاز را زیاد می کنیم، و از دمای بسیار کمی هم شروع کرده ایم، مولکول ها که همیشه در کمترین حالت تراز انرژی هستند، به تدریج شروع به رسیدن به احتمال قابل ارزیابی می کنند تا به تراز دوم برسند، و بعد به تراز بعدی و به همین ترتیب برای ترازهای بالاتر. وقتی احتمال برای تعدادی از ترازها به مقدار قابل قبولی رسید، رفتار گاز به حالتی نزدیک می شود که در فیزیک کلاسیک بررسی کردیم. چون ترازهای کوانتومی تقریباً از یک طیف پیوسته غیر قابل تشخیص می شوند و سیستم می تواند هر مقدار انرژی را داشته باشد. پس وقتی دما زیاد می شود، دوباره باید نتایج را از فیزیک کلاسیک بررسی کنیم، که به نظر می رسد موضوع شکل ۶.۴۰ است. می توان با همین روش نشان داد ترازهای انرژی چرخشی هم کوانتیده هستند ولی ترازها بسیار به یکدیگر نزدیک ترند و در شرایط معمولی  $kT$  از فاصله ها بیشتر است. پس بسیاری از ترازها برانگیخته می شوند و انرژی جنبشی چرخشی در سیستم به صورت کلاسیک بررسی می شود. تنها مثالی که این کاملاً در آن درست نیست اتم هیدروژن در دمای اتاق است.

این اولین باری است که، با مقایسه کردن با نتایج آزمایش، استنباط کرده ایم که اشکالی در فیزیک کلاسیک وجود دارد. و با همان میزان سختی و دقت که در مکانیک کوانتوم بحث می شود این مسئله را بررسی کردیم. حدود  $30$  یا  $40$  سال طول کشید تا مشکل دیگری پیدا شود و دوباره به مکانیک آماری ربط داشت. ولی این بار مکانیک گاز فوتون. آن مسئله توسط پلانک در اوایل قرن بیستم حل شد.