

## شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 31

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۳۱

مترجم: الهام سروری

ویراستار: ریحانه قنبری

حروفچین: نگین باقری نقره‌ای

نسخه‌ی ۱۰۱ پاییز ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید.

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

## فصل ۳۱

# منشأ ضریب شکست

### ۱.۳۱ شاخص شکست<sup>۱</sup>

همانطور که گفته شد نور در آب آهسته تر از هوا و در هوا با سرعت اندکی کمتر از خلاء، حرکت می‌کند. این اثر را می‌توان به وسیله پارامتر شکست،  $n$ ، مشخص کرد. تلاش ما، در این راستاست که دلیل این تغییر سرعت نور را در محیط‌های مختلف بیابیم. به طور خاص، فرض‌های فیزیکی و اظهاراتی که قبلاً انجام دادیم عبارتند از:

۱. میدان الکتریکی کل در هر شرایط فیزیکی، می‌تواند به وسیله جمع میدان‌های ناشی از همه‌ی بارهای موجود، ارائه گردد.

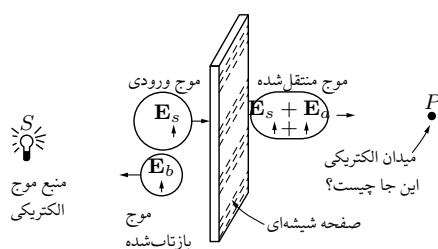
۲. میدان ناشی از یک تک بار، همیشه (برای یک میدان تابشی<sup>۲</sup>) به وسیله شتاب آن، با افت سرعت  $c$  ارزیابی می‌گردد.

اما زمانی که با یک تکه شیشه مواجه می‌شویم، ممکن است گمان کنیم، اوه نه! باید اصلاحات زیادی انجام بدهیم و افت سرعت  $c/n$  را در نظر بگیریم. اگرچه این مطلب کاملاً درست نیست اما باید به جست‌وجوی درک چگونگی این اتفاق پردازیم.

این موضوع به طور تقریبی درست است که نور یا هر موج الکتریکی با سرعت  $c/n$  در ماده‌ای با ضریب شکست  $n$  حرکت می‌کند. اما میدان‌های ناشی از حرکت همه‌ی بارهای موجود در ماده، با سهم یکسانی از سرعت نهایی  $c$ ، برای همه‌ی میدان‌های موجود می‌باشد. در واقع سوالی که مطرح می‌شود، در حوزه‌ی همین علت کاهش سرعت در ماده است.

<sup>1</sup>refraction

<sup>2</sup>radiation field



شکل ۱.۳۱: امواج الکتریکی عبور کننده از میان لایه‌ای از ماده‌ی شفاف

(ما سعی در فهم این اثر در ساده‌ترین حالت ممکن داریم) چشمه‌ی<sup>۳</sup> موجود در آزمایش، در واقع یک چشمه خارجی<sup>۴</sup> است و در مکانی دور از صفحه‌ی باریکی از ماده‌ی شفاف<sup>۵</sup> که در این مورد شیشه است، قرار می‌دهیم. ما درباره‌ی میدان، در فواصل دور، در جهت مخالف صفحه تحقیق می‌کنیم. با توجه به شکل ۱.۳۱ که دیاگرامی از موقعیت صفحه را به تصویر کشیده است؛ به طوری که  $S$  و  $P$ ، با تصور اینکه در فاصله‌ی بسیار دور از صفحه قرار گرفته‌اند کشیده شده. مطابق با اصولی که قبلاً گفته شد، یک میدان الکتریکی در هر جایی دور از همه‌ی بارهای متحرک، به صورت جمع میدان‌های تولیدی به وسیله‌ی چشمه‌ی خارجی  $S$  و میدان‌های تولید شده روی صفحه‌ی شیشه‌ای، به وسیله هر کدام از بارها می‌باشد که هر میدان متناسب با تاخیری<sup>۶</sup> در سرعت  $c$  است.

لازم به یادآوری است که سهم هر بار با حضور بارهای دیگر تغییر نمی‌کند! این ها اصول پایه هستند که با توجه به آن میدان در نقطه  $P$  به صورت زیر است:

$$\mathbf{E} = \sum_{\text{all charges}} \mathbf{E}_{\text{each charge}} \quad (1.31)$$

یا

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \sum_{\text{all other charges}} \mathbf{E}_{\text{each charge}}, \quad (2.31)$$

میدان  $E_s$ ، میدان مستقلی ناشی از چشمه خارجی است که می‌تواند به طور دقیق همان میدانی باشد که در نقطه  $p$  مشخص شده است؛ البته اگر هیچ ماده‌ای حضور نداشته باشد. یکی از فرض‌های لازم این بود که در صورت وجود هر نوع بار متحرکی، میدان در نقطه  $p$ ، دیگر تنها شامل میدان  $E_s$  نمی‌باشد.

دلیل وجود بارهای متحرک در شیشه چیست؟ همان طور که می‌دانید، همه‌ی مواد شامل اتم‌ها و مسلماً الکترون‌ها می‌باشند. زمانی که میدان الکتریکی ناشی از چشمه بر روی اتم‌های ماده اثر کند، الکترون‌های ماده را به صورت نوسانی بالا و پایین می‌کند که نشانی از وارد شدن نیرو به الکترون‌هاست. در این حالت الکترون‌های متحرک یک میدان الکتریکی جدید، ناشی از چشمه‌های تشعشع کننده‌ی جدید به وجود می‌آورند. این تشعشع کننده‌های جدید ناشی از چشمه‌ی  $S$  می‌باشند زیرا که به واسطه‌ی وجود چشمه‌ی خارجی، چنین تشعشع کننده‌هایی به وجود آمده‌اند و در واقع میدان الکتریکی کل فقط یک میدان ناشی از منبع  $S$  نیست،

<sup>3</sup>source

<sup>4</sup>the external source

<sup>5</sup>transparent

<sup>6</sup>retardation

بلکه این میدان به وسیله سهم اضافه‌ای از دیگر بارهای متحرک، اصلاح شده است. این بدان معناست که میدان، مشابه همان چیزی که قبل از گذاشتن صفحه شیشه‌ای مطرح شد نمی‌باشد. در واقع این یک میدان اصلاح شده است و به صورتی در نظر گرفته شده که میدان با سرعتی متفاوت در حال حرکت در صفحه‌ی شیشه‌ای ظاهر گردد. این همان ایده‌ای است که تمایل به بررسی آن داریم.

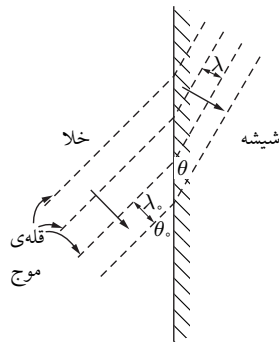
حل دقیق مسئله پیچیده است زیرا اگر چه ما ادعا کردیم که همه‌ی بارهای متحرک به وسیله چشمه، هدایت می‌شوند اما این ادعا چندان دقیق نیست. اگر یک بار را به طور خاص در نظر بگیریم، این بار تنها میدان ناشی از چشمه را حس نمی‌کند، بلکه میدان ناشی از همه‌ی بارهای متحرک را حس می‌کند. این بارها در هر جایی در صفحه شیشه‌ای حرکت می‌کنند. پس بدین ترتیب میدانی که روی یک بار خاص عمل می‌کند، به صورت ترکیبی از میدان‌های ناشی از بقیه‌ی بارهای متحرک بر روی بار مورد نظر است. می‌توان دید که در این صورت مجموعه‌ای پیچیده از معادلات را برای رسیدن به یک فرمول کامل و دقیق باید در نظر گرفت. به جای این دیدگاه، ما از روشی ساده‌تر برای درک همه‌ی اصول فیزیکی، به طور واضح استفاده می‌کنیم. می‌توان شرایطی را اعمال کرد که تاثیر اتم‌های دیگر نسبت به تاثیر چشمه‌ی خارجی بسیار کوچک باشد. به عبارت دیگر می‌توان از موادی بهره برد که میدان کلی ما، نیازی به اصلاح ناشی از بقیه‌ی بارهای متحرک نداشته باشد. این فرض در صورت استفاده از ماده‌ای با شاخص شکست بسیار نزدیک به یک ممکن می‌شود. به عنوان مثال، زمانی که چگالی اتم‌ها خیلی کوچک باشد، اتفاق می‌افتد. این محاسبات برای هر شاخص نزدیک به یک معتبر است. پس در این مورد، ما از یک حل کامل که با پیچیدگی‌های زیادی همراه است چشم پوشی می‌کنیم.

به طور تصادفی، متوجه می‌شویم که عامل دیگری نیز در حرکت بارها در شیشه تاثیر دارد و بارها موج‌هایی تشعشع می‌کنند که به سمت چشمه‌ی  $S$  برمی‌گردند. این میدان تاخیری، در واقع همان پرتویی است که به صورت بازتاب از سطح شفاف مواد می‌بینیم. این بازتاب، تنها به سطح بستگی ندارد و تابش تاخیری از هر جایی در داخل ماده به دست می‌آید. این اثرات بازتابی فعلا در محدوده‌ی تقریب قرار می‌گیرند زیرا ما محاسبات را به موادی با شاخص انعکاس نزدیک به یک که بازتاب کمی دارند محدود می‌کنیم.

قبل از اینکه مطالعات خود را با چگونگی شاخص انعکاس ادامه دهیم، باید بدانیم که تمام چیزی که نیاز داریم درباره بازتابش بدانیم، این است که چرا سرعت موج در مواد مختلف متفاوت است؛ خمش باریکه‌هایی از نور فقط از سرعت موثر امواج در مواد مختلف به دست می‌آید. برای یادآوری به شما درباره‌ی چگونگی این اتفاق، شکل ۲.۳۱ را که چندین قله‌ی<sup>۷</sup> پیوسته از موج الکتریکی که از خلا به سطح یک صفحه شیشه‌ای کدر می‌رسند را نمایش می‌دهیم.

قله‌های موج جهت حرکت امواج را نشان می‌دهند، همه‌ی نوسانات در موج باید هم فرکانس باشند (ما شاهد اینکه نوسانات امواج رسیده دقیقاً با همان فرکانسی هستند که از چشمه خارج می‌شوند هستیم.)

<sup>7</sup>crests



شکل ۲.۳۱: ارتباط بین شکست (نور) و تغییر سرعت

همچنین بدین معناست که قله‌های موج برای امواج، در هر دو طرف چشمه، باید به یک فاصله باشند. از آنجا که امواج با یکدیگر حرکت می‌کنند، بنابراین باری که در مرز نشسته، فقط یک تک فرکانس را حس می‌کند. کمترین فاصله بین قله‌های یک موج، طول موج<sup>۸</sup> نامیده می‌شود که از تقسیم سرعت بر فرکانس حاصل می‌گردد. در خلاء طول موج برابر با  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$  و در بقیه‌ی مواد  $\lambda = 2\pi v/\omega$  یا  $2\pi c/\omega n$  است (اگر  $v = c/n$  سرعت موج باشد). از شکل کاملاً مشهود است که تنها روش برای متناسب کردن امواج در مرز محیط مادی، این است که امواج در زاویه‌ای متفاوت با توجه به سطح حرکت کنند. از دیدگاه هندسی می‌توان با توجه به شکل دید که برای متناسب کردن باید  $\lambda_0/\sin\theta_0 = \lambda/\sin\theta$  یا  $\sin\theta_0/\sin\theta = n$  که قوانین اسنل<sup>۹</sup> نامیده می‌شوند، برقرار باشد. برای راحتی بحث، ما تنها با در نظر گرفتن این که چرا نور سرعت موثر  $c/n$  را با توجه به شاخص  $n$  ماده دارد، ادامه می‌دهیم و از خمش جهت نور در این بحث چشم‌پوشی می‌کنیم.

به شکل ۱.۳۱ برمی‌گردیم و بررسی خواهیم کرد که چه رهیافتی را برای محاسبه‌ی میدان تولیدی در نقطه‌ی  $P$  به وسیله‌ی همه‌ی بارهای نوسان کننده در صفحه‌ی شیشه‌ای پیش خواهیم گرفت. ما این بخش از میدان را  $E_a$  می‌نامیم و این تنها جمع روی جمله‌ی دوم معادله (۲.۳۱) است. زمانی که ما همه‌ی میدان‌ها را، به صورت جمله‌ی  $E_s$  ناشی از چشمه جمع کردیم، میدان کل را در نقطه  $P$  به دست می‌آوریم. این ممکن است جزو پیچیده‌ترین کارها باشد اما پیچیدگی در واقع در تعداد زیاد بخش‌هایی که قرار است در کنار یکدیگر قرار بگیرند تعریف می‌شود. گرچه هر بخش به تنهایی خود بسیار ساده است.

برخلاف دیگر قسمت‌ها که در بحث مشتقات تاکید داشتیم که مشتقات را فراموش کنید و فقط جواب را در نظر بگیرید؛ در این مورد ما مشتقات را کم اهمیت‌تر از پاسخ نهایی در نظر نمی‌گیریم؛ به عبارت دیگر چیزی که در حال حاضر باید درک شود، مکانیسم فیزیکی برای تولید شاخص انعکاس است.

<sup>8</sup>wavelength<sup>9</sup>Snell's law

برای این که متوجه رهیافت شوید، ابتدا باید میدان اصلاحی<sup>۱۰</sup>  $E_a$  را بیابیم. در حالی که میدان کل در نقطه  $P$  به صورت تابشی از چشمه که در طول عبور از صفحه نازک ماده، کاهش می‌یابد دیده می‌شود. اگر صفحه هیچ تاثیری بر میدان نداشته باشد، میدان موج انتشار یافته در سمت راست، در طول محور  $z$  به صورت زیر است:

$$E_s = E_o \cos \omega(t - z/c) \quad (۳.۳۱)$$

و یا به شکل نمایی:

$$E_s = E_o e^{i\omega(t-z/c)}. \quad (۴.۳۱)$$

حال چه اتفاقی می‌افتد اگر موج انتشار یافته هنگام عبور از صفحه کندتر شود؟ اجازه دهید ضخامت صفحه را  $\Delta z$  در نظر بگیریم، اگر هیچ صفحه‌ای وجود نداشت، موج فاصله  $\Delta z$  را در زمان  $\Delta z/c$  طی می‌کرد. اما اگر موج صفحه را با سرعت  $c/n$  طی کند، زمان بیشتر  $n\Delta z/c$  طول می‌کشد که این زمان اضافی با زمان قبل به صورت:  $\Delta t = (n-1)\Delta z/c$  ظاهر می‌گردد و پس از آن دوباره شروع به حرکت با سرعت  $c$  می‌کند.

ما می‌توانیم این زمان تاخیری  $t - \Delta t$  یا  $t = (n-1)\Delta z/c$  در عبور از صفحه را جایگزین  $t$  در معادله (۴.۳۱) کنیم. بنابراین موج قبل از وارد شدن به صفحه به این صورت است:

$$E_{\text{after plate}} = E_o e^{i\omega[t-(n-1)\Delta z/c-z/c]}. \quad (۵.۳۱)$$

همچنین می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

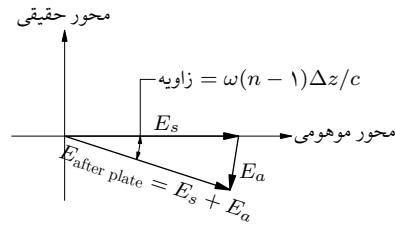
$$E_{\text{after plate}} = e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} E_o e^{i\omega(t-z/c)}, \quad (۶.۳۱)$$

میدانی که برای موج قبل از ورود به صفحه نوشتیم، از موجی که در فضایی بدون صفحه نوشته شده است به وجود می‌آید؛ یعنی با در نظر گرفتن  $E_s$  با ضربی از فاکتور  $e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c}$ .

در حال حاضر ما می‌دانیم که ضرب یک تابع نوسانی<sup>۱۱</sup> مانند  $e^{i\omega t}$  به وسیله‌ی فاکتور  $e^{i\theta}$  تنها دربارهی تغییر فاز نوسانات به وسیله زاویه  $\theta$  صحبت می‌کند و البته که تاخیر اعمالی در هنگام عبور موج از ضخامت  $\Delta z$  را نیز شامل می‌شود. این باعث برگشت فاز به مقدار  $\omega(n-1)\Delta z/c$  می‌گردد. تعبیر بازگشت از علامت منفی، در نما حاصل می‌شود. خیلی زود از این مسئله صحبت خواهیم کرد که وجود صفحه، یک میدان  $E_a$  به میدان‌های اصلی  $E_s = E_o e^{i\omega(t-z/c)}$  اضافه می‌کند؛ اما ما به جای آن تاثیر حضور صفحه را به صورت ضرب میدان در فاکتوری که فاز را انتقال می‌دهد در نظر می‌گیریم. با این حال مباحث گفته شده درست است، زیرا ما می‌توانیم همان نتایج را به وسیله‌ی اضافه کردن یک عدد مختلط مناسب به دست

<sup>10</sup>correction field

<sup>11</sup>oscillating function

شکل ۳.۳۱: نمودار موج انتقال یافته در  $t$  و  $z$  مشخص

آوریم. برای راحتی کار عدد صحیح<sup>۱۲</sup> اضافه شده به  $e^x$  را بسیار کوچک در نظر می‌گیریم (یادآوری می‌شود اگر  $x$  خیلی کوچک باشد  $e^x$  معادل با  $1 + x$  نوشته می‌شود). بنابراین می‌توان نوشت:

$$e^{-i\omega(n-1)\Delta z/c} = 1 - i\omega(n-1)\Delta z/c. \quad (۷.۳۱)$$

با استفاده از معادل سازی انجام شده با رابطه (۶.۳۱) به

$$E_{\text{after plate}} = \underbrace{E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_s} - \underbrace{\frac{i\omega(n-1)\Delta z}{c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_{E_a}. \quad (۸.۳۱)$$

می‌رسیم.

جمله‌ی اول فقط به میدان حاصل از منبع تعلق دارد و جمله‌ی دوم معادل  $E_a$  است. میدان تولیدی به وسیله‌ی بارهای نوسانی در طرف راست صفحه به صورت شاخص انعکاس  $n$  حضور یافته‌اند و همچنین به قدرت موج ناشی از منبع نیز وابسته است.

اگر به نمودار شکل ۳.۳۱ نگاهی بیندازیم، آنچه انجام می‌دهیم به راحتی قابل مشاهده است. ما ابتدا عدد  $E_s$  را رسم می‌کنیم (مقادیر فرض شده برای  $z$  و  $t$ ،  $E_s$  را افقی نگاه می‌دارد اما این کار ضرورتی ندارد) تاخیر ناشی از کاهش میدان در صفحه را به صورت تاخیری در فاز این عدد نشان می‌دهیم که باعث می‌شود  $E_s$  چرخشی با زاویه منفی داشته باشد. این، معادل با اضافه کردن بردار کوچک  $E_a$  به زوایای تقریباً قائم  $E_s$  است. اما درباره فاکتور  $-i$  در جمله‌ی دوم معادله (۸.۳۱) چه می‌توان گفت؟ در واقع این فاکتور، تفسیری از این موضوع دارد که اگر  $E_a$  حقیقی باشد، در این صورت  $E_s$  مختلط و منفی خواهد شد، یا به طور کلی  $E_s$  و  $E_a$  یک زاویه قائم می‌سازند.

## ۲.۳۱ میدان ناشی از مواد

حال می‌توان سوال کرد که آیا میدان  $E_a$  که از جمله سوم معادله (۸.۳۱) حاصل می‌گردد، همان طور که انتظار داریم ناشی از بارهای در حال نوسان در صفحه است؟ اگر بتوانیم این موضوع را نشان دهیم، پس

<sup>12</sup>right number



از آن می‌توانیم مقدار شاخص  $n$  را محاسبه کنیم؛ چون  $n$  یک کمیت غیر بنیادی در معادله (۸.۳۱) است. حال به محاسبه میدان  $E_a$  که توسط بارهای حاضر در مواد تولید می‌شود، می‌پردازیم. (برای راحتی کار، جدول زیر را که شامل همه‌ی پارامترهای مورد استفاده است را ارائه می‌کنیم، که برای محاسبات می‌توان به راحتی از آن بهره برد.)

جدول ۱.۳۱: پارامترهای مورد استفاده در محاسبات

$E_s$  = میدان ناشی از منبع

$E_a$  = میدان تولیدی به وسیله بارهای موجود در صفحه

$\Delta z$  = ضخامت صفحه

$z$  = فاصله عمودی از صفحه

$n$  = شاخص بازتابش

$\omega$  = فرکانس زاویه ای تابش

$N$  = تعداد بارها در واحد حجم صفحه

$\eta$  = تعداد بارها در واحد سطح صفحه

$q_e$  = بار الکترون

$m$  = جرم الکترون

$\omega_0$  = فرکانس تشدید یک الکترون مقید در اتم

اگر چشمه  $S$  (شکل ۱.۳۱) که در سمت چپ شکل واقع است، خیلی دور باشد، میدان  $E_s$  فاز یکسانی در همه جا روی صفحه خواهد داشت. بنابراین میدان  $E_s$  در نزدیکی صفحه به صورت زیر است:

$$E_s = E_0 e^{i\omega(t-z/c)}. \quad (9.31)$$

و در سمت راست صفحه که  $z = 0$  می‌باشد خواهیم داشت:

$$E_s = E_0 e^{i\omega t} \text{ (روی صفحه)}. \quad (10.31)$$

هر کدام از الکتروهای موجود در اتم‌های صفحه، این میدان الکتریکی را حس کرده و شروع به نوسان (با این فرض که جهت‌گیری  $E_0$  قائم می‌باشد) به وسیله نیروی الکتریکی  $qE$  می‌کنند. برای پیدا کردن حرکت مورد انتظار برای الکترون‌ها، ما با این فرض جلو می‌رویم که اتم‌ها مشابه نوسانگرهای کوچکی هستند و الکترون‌ها به طور الاستیک به اتم‌ها چسبیده‌اند. این بدان معناست که اگر نیرویی به الکترون‌ها وارد شود، جابه‌جایی الکترون‌ها از جایگاه اولیه‌شان متناسب با نیروی وارده است.

ممکن است درباره مدلی شنیده باشید که در آن با الکترونی چرخان در مداری به دور هسته مواجهیم؛ ممکن است چنین مدلسازی ساده انگارانه به نظر برسد، اما این تنها یک تصویر بیش از حد ساده است. تصویر صحیحی از اتم‌ها را می‌توان در مکانیک موجی جست‌وجو کرد. تا آنجا که به مباحث نور مربوط می‌شود، می‌توان رفتار الکترون‌ها را قابل ارتجاع و فرگونه دید. بنابراین ما فرض می‌کنیم الکترون‌ها، با یک نیروی بازگشتی خطی همراه هستند درحالی که جرم  $m$  را نیز شامل می‌شوند. چنین فرضی رفتار الکترون‌ها را به صورت نوسانگرهای کوچک با فرکانس رزونانسی  $\omega_0$  در نظر می‌گیرد. قبلاً چنین نوسانگرهایی را مطالعه کردیم. معادله حرکت به این صورت است:

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = F, \quad (11.31)$$

که  $F$  نیروی وارد شده می‌باشد.

در مسئله ما نیروی وارد بر نوسانگرها، حاصل از میدان الکتریکی ناشی از چشمه است؛ بنابراین ما می‌توانیم از

$$F = q_e E_s = q_e E_0 e^{i\omega t}, \quad (12.31)$$

استفاده کنیم.

که بار الکتریکی  $q_e$  الکترون می‌باشد و برای  $E_s$  از رابطه (۱۰.۳۱) تعریف می‌شود. معادله حرکت به صورت:

$$m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = q_e E_0 e^{i\omega t}. \quad (13.31)$$

و جواب‌های این معادله به صورت:

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad (14.31)$$

می‌باشد، که با جایگزاری در معادله (۱۳.۳۱) به این نتیجه می‌رسیم که:

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (15.31)$$

در نتیجه

$$x = \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}. \quad (16.31)$$

در واقع ما نیاز داریم که از حرکت الکترون‌ها در صفحه اطلاع داشته باشیم، که برای همه‌ی الکترون‌های واقع در صفر حرکت یکسان است.

اکنون آماده‌ی یافتن میدان  $E_a$  تولید شده توسط اتم‌ها در نقطه  $P$  هستیم. همان طور که قبلاً بحث کردیم، چستی میدان حاصل از ورقه‌های باردار که همه‌ی بارهای آن متحرک است، مطرح است (فصل ۳۰). به معادله ۱۹.۳۰ بازمی‌گردیم. می‌دانیم که میدان  $E_a$  در نقطه  $P$  از مرتبه یک ثابت منفی است. در واقع سرعت بار به اندازه  $z/c$  تاخیر دارد. دیفرانسیل‌گیری از پارامتر  $x$  در معادله (۱۶.۳۱) بر تاخیر اتفاق افتاده تأکید می‌کند. (کافیست  $x$  را از معادله (۱۵.۳۱) به (۱۸.۳۱) جایگزین کنیم) بنابراین:

$$E_a = -\frac{\eta q_e}{2\epsilon_0 c} \left[ i\omega \frac{q_e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega(t-z/c)} \right]. \quad (17.31)$$

طبق انتظار ما حرکت الکترون‌ها یک موج اضافی  $e^{i\omega(t-z/c)}$  به سمت راست با دامنه‌ی متناسب با تعداد اتم‌ها در واحد سطح صفحه و همچنین فاکتور  $\eta$  و قدرت چشمه میدان فاکتور  $E_0$  تولید می‌کند. همانطور که انتظار داریم، فاکتورهای دیگری وابسته به خواص اتم‌ها از جمله  $(q_e, m, \omega)$  نیز وجود دارد. مهم‌ترین چیزی که مطرح است، این است که فرمول (۱۷.۳۱) برای میدان  $E_a$ ، با در نظر گرفتن اینکه موج (اولیه) اصلی در هنگام عبور از ماده، با شاخص بازتابش  $n$  تاخیر دارد. به نظر بسیار مشابه عبارت  $E_a$  که در معادله (۸.۳۱) داشتیم است. در واقع دو عبارت معادل یکدیگرند اگر:

$$(n-1)\Delta z = \frac{\eta q_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (18.31)$$

توجه داشته باشید که دو طرف عبارت متناسب با  $\Delta z$  می‌باشد و  $\eta$  تعداد اتم‌ها در واحد سطح و متناسب با  $N\Delta z$  است و  $N$  تعداد اتم‌ها در واحد حجم صفحه می‌باشد. با جایگزینی  $N\Delta z$  به جای  $\eta$  و کنسل کردن  $\Delta z$  از دو طرف، نتیجه‌ی اصلی فرمولی برای شاخص بازتابش و متناسب با اتم‌های ماده و فرکانس نور است:

$$n = 1 + \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (19.31)$$

این فرمول همان توضیحی از شاخص بازتابش که انتظار داریم را فراهم می‌کند.

## ۳.۳۱ پراکندگی

توجه داشته باشید که در فرآیند ذکر شده، چیز جالبی را به دست آوردیم. در واقع این کمیت برای ما تنها عددی برای محاسبه‌ی شاخص بازتابش از کمیت‌های اساسی اتمی نیست. فراتر از آن ما یاد می‌گیریم که شاخص بازتابش چگونه متفاوت از فرکانس  $\omega$  نور خواهد بود. این نتیجه مسلماً از جمله‌ی ساده‌ی « نور در مواد شفاف کندتر حرکت می‌کند» به وضوح قابل فهم نیست. اما همچنان یک مشکل وجود دارد که شامل تعداد اتم‌ها در واحد حجم ماده و ماهیت فرکانس ذاتی  $\omega_0$  می‌باشد. از آنجا که این پارامتر یک

متغیر با جنس ماده است و برای مواد مختلف مقدار متفاوتی را می‌گیرد؛ یک تئوری کلی تا به امروز برای آن تعریف نشده است و تنها مسئله‌ای است که در این زمینه از آن آگاهی نداریم. فرمول‌بندی‌ای کلی از خواص مواد مختلف با فرکانس‌های ذاتی متفاوت، تنها از طریق مکانیک کوانتومی برای اتم‌ها امکان‌پذیر است. مواد مختلف خواص مختلف و شاخص‌های گوناگونی دارند، پس انتظار یک فرمول بندی کلی برای شاخص همهی مواد معقول نمی‌باشد.

با این حال باید درباره‌ی ارائه فرمولی که در شرایطی متفاوت ارائه می‌شود صحبت کنیم. اول اینکه برای همهی گازهای معمولی (به عنوان مثال: هوا، بیشتر گازهای بی‌رنگ مثل هلیوم، هیدروژن و...) فرکانس ذاتی الکترون‌های نوسان‌کننده متناسب با نور فرابنفش<sup>۱۳</sup> است. این فرکانس، بالاتر از فرکانس نور مرئی است که در این صورت  $\omega$  بیشتر از  $\omega$  نور مرئی در نظر گرفته می‌شود و در تقریب مرتبه‌ی اول می‌توان از  $\omega^2$  در مقایسه با  $\omega$  صرف نظر نمود. در این صورت ما شاخص ثابت بازتابش را تقریباً ثابت در نظر می‌گیریم. در واقع برای یک گاز شاخص تقریباً یکسان می‌باشد که برای اکثر مواد شفاف مانند شیشه معقول است. اگر به بیان خود کمی دقیق‌تر نگاه کنیم، متوجه می‌شویم همانطور که  $\omega$  به مقدار کمی از فرکانس ذاتی در مخرج افزایش یابد، متقابلاً شاخص نیز افزایش می‌یابد. بنابراین  $n$  به آرامی با فرکانس افزایش پیدا می‌کند. شاخص شکست برای نور آبی در مقایسه با نور قرمز بیشتر است و این دلیلی بر این است که چرا پرتویی که به یک منشور وارد می‌شود، آبی بیشتری نسبت به قرمز منعکس می‌کند.

پدیده‌هایی که شاخص شکست آن‌ها وابسته به فرکانس است، پراکندگی<sup>۱۴</sup> خوانده می‌شوند و بر مبنای این حقیقت نهادینه شداند که نور به وسیله یک منشور به یک طیف پراکنده می‌شود. معادله‌ای که برای شاخص بازتابش به صورت تابعی از فرکانس ارائه می‌گردد، معادله‌ی پراکندگی خوانده می‌شود. بنابراین ما این معادله را به دست آوردیم. (در چند سال گذشته رویکرد جدیدی از معادلات پراکندگی در تئوری ذرات بنیادی<sup>۱۵</sup> استفاده شده است.)

معادلات پراکندگی تأثیرات جالب دیگری را نیز خاطر نشان می‌کند. اگر یک فرکانس ذاتی  $\omega$  داشته باشیم که در محدوده‌ی مرئی واقع شده باشد و اگر به اندازه‌گیری شاخص بازتابش ماده‌ای مانند شیشه در محدوده‌ی فرابنفش پردازیم که  $\omega$  تقریباً به  $\omega$  نزدیک است. در این صورت خواهیم دید که در فرکانس‌های بسیار نزدیک به فرکانس ذاتی نور، شاخص شکست به طور غیر عادی بزرگ می‌شود! (مخرج صفر می‌گردد.) به عنوان قدم بعد، فرض کنید که مقدار  $\omega$  بیشتر از  $\omega$  باشد. این مسئله می‌تواند زمانی که یک قطعه ماده مانند شیشه داشته باشیم و تحت اشعه ایکس<sup>۱۶</sup> قرار دهیم اتفاق بیفتد. بیشتر مواد مانند گرافیت<sup>۱۷</sup> برای دیدن نور، کدر (غیر شفاف) هستند؛ بنابراین با عبور اشعه ایکس از ماده می‌توانیم درباره شاخص بازتابش اشعه ایکس در کربن صحبت کنیم. از آنجا که تابش اشعه ایکس فرکانس بالایی دارد؛ بنابراین فرکانس طبیعی همهی اتم‌های کربن باید کمتر از فرکانس مورد استفاده در اشعه ایکس باشد. شاخص بازتابش را

<sup>13</sup>ultraviolet light<sup>16</sup>x-rays<sup>14</sup>dispersion<sup>17</sup>graphite<sup>15</sup>elementary particles

می‌توان با در نظر گرفتن  $\omega$  معادل با صفر در معادله‌ی پراکندگی به دست آورد. (از  $\omega^2$  برابر  $\omega^2$  می‌توان صرف نظر کرد.)

چنین وضعیتی می‌تواند برای باریکه‌ای از امواج رادیویی (یا نور) در هنگام عبور از الکترون‌های آزاد گاز نیز اتفاق بیفتد. در بالای اتمسفر، الکترون‌ها با اشعه فرابنفش خورشید از اتم‌ها آزاد شده‌اند و به صورت الکترون‌های آزاد در بالای اتمسفر واقع شده‌اند. برای الکترون‌های آزاد  $\omega = 0$  می‌باشد (هیچ گونه نیروی بازگرداننده الاستیکی وجود ندارد). با تنظیم مقدار  $\omega = 0$  در معادله پراکندگی می‌توان یک فرمول معقول برای شاخص بازتابش امواج رادیویی در اتمسفر به دست آورد که  $N$  چگالی الکترون‌های آزاد در اتمسفر را نشان می‌دهد (تعداد در واحد حجم). یک بار دیگر به معادله نگاه می‌کنیم. اگر پرتوی ما اشعه ایکس یا موج رادیویی (یا هر موج الکتریکی دیگر) در ماده باشد، برای الکترون‌های آزاد جمله‌ی  $(\omega^2 - \omega_p^2)$  منفی می‌شود و در این صورت مقدار شاخص بازتابش کمتر از یک می‌گردد که بدین معناست، که سرعت موثر امواج در مواد بیشتر از سرعت نور است! آیا چنین چیزی معقول است؟

علی‌رغم این حقیقت که یک سیگنال را نمی‌توان با سرعتی بیش از سرعت نور حرکت کند؛ با این حال می‌توان گفت که شاخص بازتابش مواد در فرکانس‌های خاص می‌تواند از یک کمتر یا بیشتر باشد. این تنها بدین معناست که انتقال فاز تولید شده به وسیله‌ی پراکندگی نور، می‌تواند مثبت و یا منفی باشد. در واقع ایده نشان می‌دهد که سرعت سیگنال ارسالی به وسیله‌ی شاخص یک فرکانس مشخص نمی‌شود بلکه به شاخص همه‌ی فرکانس‌ها وابسته است. گره<sup>۱۸</sup> یک موج به خودی خود یک سیگنال نیست. در یک موج ایده‌آل که هیچ نوع مدولی نداشته باشد، یعنی نوسان پایا داشته باشد؛ نمی‌توانید درباره‌ی لحظه‌ی شروع موج صحبت کنید. بنابراین نمی‌توانید از آن به عنوان یک سیگنال زمان بندی شده استفاده کنید. به منظور ارسال یک سیگنال، شما باید سیگنال را به شکل گوناگونی تغییر دهید؛ در سیگنال فرورفتگی ایجاد کنید یا آن را کمی پهن‌تر یا تیزتر کنید؛ به این معنا که شما باید بیش از یک فرکانس در موج داشته باشید و می‌توان دید که سرعت سیگنال‌های رونده تنها وابسته به یک شاخص نیست اما می‌توان گفت بر اساس اینکه شاخص با فرکانس تغییر می‌کند، مطرح می‌گردد (این موضوع تا فصل ۴۸ به تعلق خواهد افتاد). پس ما به محاسبه سرعت واقعی سیگنال‌ها در میان شیشه خواهیم پرداخت و خواهیم دید، این مقدار از سرعت نور بیشتر نخواهد شد. گرچه که گره‌ها از نقطه نظر ریاضیات سریع‌تر از نور حرکت می‌کنند.

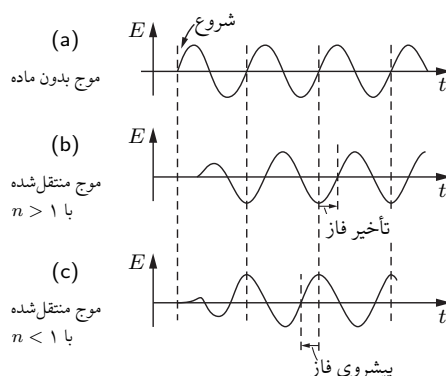
باید توجه داشت که مشکل واقعی با این حقیقت همراه است که عملکرد بارها مخالف میدان است، یعنی علامت منفی به معنی بازگشت به عقب می‌باشد پس بنابر آنچه گفتم پارامتر  $x$  معادله‌ی (۱۶.۳۱) جابه‌جایی بار در جهت مخالف میدان متحرک، به علت منفی شدن جمله‌ی  $(\omega^2 - \omega_p^2)$  را نشان می‌دهد که ناشی از  $\omega$  بسیار کوچک است. فرمول درباره‌ی تمایل حرکت بارهای متحرک در خلاف جهت میدان الکتریکی، در یک جهت خاص صحبت می‌کند.

چه اتفاقی مسئول جهت گیری بارها در یک جهت مخالف میدان است؟ منشا این حرکت خلاف جهت در لحظه‌ی روشن شدن میدان، مطرح نمی‌شود. در واقع زمانی که حرکت آغاز می‌شود، یک گذار به وجود

<sup>18</sup>nodes

می‌آید که پس از مدتی، حل و فصل می‌گردد و پس از آن فاز نوسان بار مخالف میدان متحرک قرار می‌گیرد و سپس فاز میدان انتقالی می‌تواند ظاهر شود که با حضور موج چشمه، این فاز ارتقا می‌یابد. این ارتقا در فاز بدین معناست که هرگاه از سرعت فاز و یا سرعت گره‌ها حرف می‌زنیم، آن را بیش از سرعت  $c$  در نظر می‌گیریم. در شکل ۴.۳۱ یک تصویر از ایده‌ی خود، درباره‌ی این که چگونه امواج به طور ناگهانی شروع می‌شوند (برای ایجاد یک سیگنال) به نظر می‌آید. می‌توان از روی شکل متوجه شد که سیگنال (یعنی شروع حرکت موج) تاخیری نسبت به فاز ارتقا یافته است.

حال اگرنگاهی به معادله‌ی پراکندگی بیندازیم، باید متوجه باشیم که بررسی‌های ما از شاخص بازتابش، نتایجی به همراه دارد که گاهی به راحتی می‌توانید در طبیعت آن‌ها را ببینید.

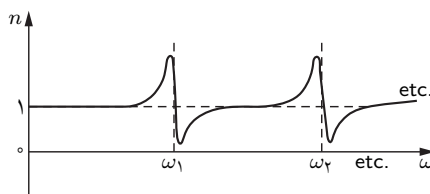


شکل ۴.۳۱: سیگنال‌های موج

با افزودن چند اصلاح، دقت کار خود را کامل می‌کنیم. اول این که انتظار میرایی برای مدل نوسانگر اتمی خود داریم (در غیر این صورت مدل تا ابد نوسان خواهد داشت که چنین چیزی اتفاق نمی‌افتد). همانطور که قبلاً ملاحظه کردید، در معادله ۸.۲۳، حرکت نوسانگر میرا شده و نتیجه آن را در مخرج معادله‌ی (۱۶.۳۱) ملاحظه می‌کنید. بنابراین معادله (۱۹.۳۱) از  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  به  $(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$  تغییر می‌کند که  $\gamma$  ضریب میرایی می‌باشد.

مورد دومی که در جهت افزایش دقت اعمال می‌شود، مربوط به این حقیقت است که چندین فرکانس رزونانسی برای نوع خاصی از اتم وجود دارد. به راحتی می‌توانیم معادله‌ی پراکندگی را با فرض این که به وسیله‌ی چندین نوسانگر مختلف، درحالی که هر کدام مستقل عمل می‌کنند و به راحتی می‌توان مشارکت همه نوسانگرها را در نظر گرفت، ثابت کنیم. اجازه دهید  $N_k$  الکترون را در واحد حجم در نظر بگیریم. درحالی که فرکانس طبیعی آن  $\omega_k$  و فاکتور میرایی را  $\gamma_k$  در نظر می‌گیریم. در این صورت معادله پراکندگی به صورت زیر است:

$$n = 1 + \frac{q_e^2}{2\epsilon_0 m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}. \quad (20.31)$$



شکل ۵.۳۱: شاخص شکست به عنوان تابعی از فرکانس

در پایان، یک عبارت کامل برای شاخص انعکاس که برای مواد مختلفی تعریف شده را توصیف می‌کنیم.<sup>۱۹</sup> شاخص تعریف شده به وسیله این فرمول، با فرکانس به شدت تغییر می‌کند که به صورت نمودار (۵.۳۱) می‌باشد.

باید توجه داشته باشیم که  $\omega$  به فرکانس‌های رزونانسی نزدیک نیست و شیب خم مثبت می‌باشد. چنین شیب مثبتی را پراکندگی نرمال<sup>۲۰</sup> می‌نامند. (زیرا مشهود است که اتفاقی رایج می‌باشد.) با این حال طیف کوچکی از  $\omega$  برای شیب منفی در نزدیکی فرکانس رزونانسی وجود دارد. چنین شیب منفی را اغلب پراکندگی غیرطبیعی (به معنی غیر عادی<sup>۲۱</sup>) می‌خوانند. چنین نامگذاری از آنجا نشئت می‌گیرد که، زمانی که اولین بار این مشاهدات انجام گرفت، خیلی قبل از کشف الکترون بود و چنین مشاهداتی غیر عادی به نظرمی‌آمد، اما امروزه هر دو شیب عادی تلقی می‌شوند.

## ۴.۳۱ جذب

ممکن است متوجه چیز نسبتاً کوچک و عجیبی در رابطه (۲۱.۳۱) که برای معادله پراکندگی مطرح شده است شویم. به علت وجود جمله  $i\gamma$  که در میرایی مطرح شد؛ ما با شاخص انعکاس مختلط روبه‌رو می‌شویم. این به چه معناست؟ با کار کردن روی قسمت موهومی و حقیقی  $n$  می‌توان نوشت:

$$n = n' - in'' \quad (21.31)$$

که  $n'$  و  $n''$  اعداد حقیقی می‌باشند. (علامت منفی وارد شده در پشت  $in''$  به منظور این است که ممکن است  $n''$  به عددی مثبت تغییر پیدا کند که می‌توانید خود، آن را نشان دهید.) می‌توان معنی شاخص مختلط را با برگشتن به معادله (۶.۳۱) که معادله موجی رونده به صفحه‌ای از ماده با شاخص  $n$  است فهمید.

<sup>۱۹</sup> در واقع اگر چه در مکانیک کوانتومی معادله (۲۰.۳۱) هنوز معتبر است، تفسیر آن در بعضی مواقع متفاوت می‌باشد. در مکانیک کوانتوم یک الکترون از یک اتم، مانند هیدروژن چندین فرکانس رزونانسی دارد. بنابراین  $N_k$  واقعا به معنی تعداد الکترون‌ها با فرکانس  $\omega_k$  نیست و می‌توان به جای آن  $N f_k$  را جایگزین کرد، که  $N$  تعداد اتم‌ها در واحد حجم و  $f_k$  (قدرت نوسانگر) فاکتوری است که نشان دهنده قدرتی است که هر اتم برای هر کدام از فرکانس‌های رزونانسی خود نشان می‌دهند.

<sup>۲۰</sup>normal

<sup>۲۱</sup>abnormal

اگر شاخص مختلط  $n$  را در معادله زیر بگذاریم و کمی معادله را بالا و پایین کنیم در این صورت داریم:

$$E_{\text{after plate}} = \underbrace{e^{-\omega n'' \Delta z/c}}_A \underbrace{e^{-i\omega(n'-1)\Delta z/c} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}}_B. \quad (22.31)$$

فاکتور آخر در معادله‌ی (۲۲.۳۱) را،  $B$  برچسب می‌زنیم که فقط به فرم قبل است و دوباره می‌توان گفت که توصیف کننده موجی است که فاز آن تاخیری به وسیله‌ی زاویه در حرکت در ماده دارد. جمله‌ی اول،  $A$  جدید است و از آنجا که دو  $i$  یکدیگر را کنسل می‌کنند، فاکتوری نمایی با نمای حقیقی ظاهر می‌گردد. از آنجا که فاکتور نمایی منفی است، عددی کوچکتر از یک و حقیقی می‌باشد. این فاکتور توصیف کننده‌ی کاهش اندازه میدان و همانطور که انتظار داریم بیشتر از بزرگی  $\Delta z$  است. هم‌زمان با پیشروی موج در ماده، قدرت موج نیز ضعیف می‌شود. در واقع ماده، قدرت جذب کنندگی موج را دارد و موج با انرژی کمتری خارج می‌گردد! جای تعجبی وجود ندارد. از آنجا که میرایی به وسیله نوسانات صورت گرفته در موج به صورت نیروی اصطکاک است و همانطور که انتظار داریم عاملی برای کاهش انرژی می‌باشد؛ می‌توان دید که بخش موهومی شاخص  $n''$  در شاخص مختلط انعکاس، نمایش دهنده‌ی یک جذب یا (افت قدرت) برای یک موج است. در واقع  $n''$  گاهی به شاخص جذب<sup>۲۲</sup> معروف است.

ممکن است متوجه این موضوع هم شویم که بخش موهومی شاخص  $n$  متناظر با خم شدن بردار  $E_a$  نسبت به مبدا در شکل ۳.۳۱ است و این کاملاً قضیه را واضح می‌کند که چرا میدان انتقالی کاهش می‌یابد. به طور معمول، در شیشه جذب نور بسیار کم است و این ادعا را می‌توان در معادله (۲۰.۳۱) مشاهده کرد، زیرا بخش موهومی مخرج  $i\gamma_k \omega$  بسیار کوچک‌تر از جمله‌ی  $(\omega_k^2 - \omega^2)$  است. اما اگر فرکانس  $\omega$  نور به  $\omega_k$  بسیار نزدیک باشد، جمله‌ی رزونانسی  $(\omega_k^2 - \omega^2)$  در مقایسه با  $i\gamma_k \omega$  کوچک می‌شود و شاخص، تقریباً موهومی محض می‌گردد و جذب نور فرآیند غالب می‌شود. تاثیر این جذب نور را می‌توان در خطوط تیره طیف نور خورشید جست‌وجو کرد. نوری که از سطح خورشید خارج می‌شود، از اتمسفر خورشید عبور می‌کند (همانطور که برای زمین هم مطرح است). این نور به شدت در فرکانس رزونانس اتم‌ها در اتمسفر خورشید جذب می‌شود.

مشاهده چنین خطوط طیفی در نور خورشید به ما اجازه می‌دهد تا درباره‌ی فرکانس‌های رزونانس اتم‌ها و ترکیبات شیمیایی اتمسفر خورشید بحث کنیم. مشاهدات مشابه این به ما درباره‌ی مواد تشکیل دهنده‌ی ستاره‌ها اطلاعات می‌دهند. با انجام چنین اندازه‌گیری‌هایی درباره‌ی عناصر شیمیایی موجود در خورشید و ستاره‌ها و به همین شکل عناصر زمین اطلاع می‌یابیم.

<sup>22</sup>absorption index



## ۵.۳۱ انرژی حمل شده به وسیله موج الکترون

همانطور که می‌دانید بخش موهومی شاخص به معنی جذب است و ما با استفاده از همین اطلاعات باید درباره‌ی پیدا کردن انرژی حمل شده به وسیله‌ی موج نور صحبت کنیم. خیلی زود می‌توان مطرح کرد که انرژی حمل شده به وسیله‌ی نور متناسب با  $\overline{E^2}$  و میانگین زمانی مربع میدان الکتریکی در موج می‌باشد. کاهشی که در میدان  $E$  اتفاق می‌افتد، ناشی از جذب است و به معنی از دست دادن انرژی است که خود را به شکل اصطکاک الکترونی نشان می‌دهد و ممکن است شروع به گرم کردن ماده کند.

اگر ما نور رسیده به واحد سطح را در نظر بگیریم و به اندازه یک سانتی متر مربع در صفحه شکل ۱.۳۱ باشد؛ می‌توانیم معادله انرژی زیر را بنویسیم (با فرض اصل پایستگی انرژی).

$$(۲۳.۳۱) \quad \text{انرژی خروجی در واحد ثانیه} + \text{کار انجام شده در واحد ثانیه} = \text{انرژی در واحد ثانیه}$$

برای جمله اول می‌توان  $\alpha \overline{E_s^2}$  را نوشت که  $E^2$  ضریب ثابتی است که اطلاعاتی درباره مقدار آن نداریم و متناسب با نسبت مقدار میانگین  $\overline{E_s^2}$  به انرژی حمل شده می‌باشد. برای جمله‌ی دوم می‌توان از بخش شامل اتم‌های تابش کننده ماده صحبت کرد که ما می‌توانیم از  $\alpha \overline{E_s} + \overline{E_a^2}$  یا  $\alpha \overline{E_s} + 2\overline{E_s E_a} + \overline{E_a^2}$  (طبق ارزیابی بر اساس مربع) استفاده کنیم.

تمام محاسبات برای لایه‌های نازکی از ماده که شاخص آن‌ها خیلی از یک فاصله ندارد، انجام شده است. در این صورت  $E_a$  معمولاً از  $E_s$  کمتر می‌باشد (برای سادگی محاسبات). با در نظر گرفتن تقریبات، می‌توانیم از جمله  $\overline{E_a^2}$  در مقابل  $\overline{E_a E_s}$  به علت کوچکی صرف نظر کنیم. می‌توانید ادعا کنید که با در نظر گرفتن چنین تقریباتی می‌توان از  $\overline{E_a E_s}$  نیز به علت کوچکی در برابر  $\overline{E_s^2}$  صرف نظر کرد. درست است که  $\overline{E_a E_s}$  کوچک‌تر از  $\overline{E_s^2}$  می‌باشد اما باید جمله‌ی  $\overline{E_a E_s}$  را حفظ کرد و یا اینکه تقریب خود را با در نظر نگرفتن کامل حضور ماده در معادله اعمال کرد. یکی از راه‌های چک کردن معادلات، حفظ جملاتی است که متناسب با  $N\Delta z$ ، یعنی چگالی سطح اتم‌ها در ماده می‌باشد. اما این در حالی است که ما از جملاتی شامل  $(N\Delta z)^2$  یا هر مرتبه‌ی بالاتری از  $N\Delta z$  صرف نظر کنیم. این مسئله را تقریب چگالی پایین می‌خوانیم.

به طور مشابه ممکن است تصور کنیم که جمله‌ی مربوط به انرژی، در معادله‌ی انرژی نادیده گرفته شده؛ اما این موضوع صحیح است، زیرا از آنجا که دامنه‌ی موج بازگشتی متناسب با  $nz$  است، این جمله نیز با  $2nz$  متناسب خواهد بود. برای آخرین جمله در معادله‌ی (۲۳.۳۱) علاقمند به محاسبه نرخ کار انجام شده به وسیله موج ورودی روی الکترون‌ها هستیم.

می‌دانیم کار، نیرو در فاصله می‌باشد. بنابراین نرخ انجام کار (توان) نیرو در سرعت است. توان به صورت  $F \cdot v$  است و از آن جا که نیرو و سرعت هم جهت هستند و همانطور که در اینجا ملاحظه می‌کنید، نگرانی درباره‌ی ضرب نقطه‌ای وجود ندارد (به جز در حالتی که علامت منفی ظاهر گردد). پس برای هر اتم، میانگین کار انجام شده سهم  $q_e \overline{E_s v}$  را دارد. از آنجا که  $N\Delta z$  اتم در واحد سطح وجود دارد، جمله‌ی

آخر معادله (۲۴.۳۱) باید به صورت  $N \Delta z q_e \overline{E_s v}$  باشد و معادله انرژی به صورت:

$$\alpha \overline{E_s^2} = \alpha \overline{E_s^2} + 2\alpha \overline{E_s E_a} + N \Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (24.31)$$

جمله‌ی  $\overline{E_s^2}$  کنسل می‌شود و داریم:

$$2\alpha \overline{E_s E_a} = -N \Delta z q_e \overline{E_s v}. \quad (25.31)$$

حال به معادله (۱۹.۳۱) بازمی‌گردیم که برای  $z$  های بزرگ داریم:

$$E_a = -\frac{N \Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} v(z/c) \quad (\text{تأخیر به اندازه‌ی } z/c) \quad (26.31)$$

(که  $\eta = N \Delta z$  می‌نامیم)

با قرار دادن (۲۶.۳۱) در سمت چپ (۲۵.۳۱) به

$$2\alpha \frac{N \Delta z q_e}{2\epsilon_0 c} \overline{E_s(z) \cdot v(z/c)}.$$

می‌رسیم.

بنابراین (در  $z$ ) همان  $E_s$  همان  $E_s$  در اتم‌هاست که به اندازه  $z/c$  تاخیر دارد. از آنجا که میانگین، مستقل از زمان است، این همان چیزی است که به عنوان تاخیر در اندازه  $z/c$  یا  $v$  (در اتم‌ها) خوانده می‌شود و شباهتی با آنچه در طرف راست معادله (۲۵.۳۱) می‌بینیم دارد. دو طرف معادله یکسان است اگر

$$\frac{\alpha}{\epsilon_0 c} = 1, \quad \text{or} \quad \alpha = \epsilon_0 c. \quad (27.31)$$

متوجه شدیم اگر انرژی پایسته باشد، انرژی حمل شده به وسیله‌ی موج الکترون در واحد سطح و واحد زمان (یا آنچه که ما شدت می‌خوانیم) به وسیله  $\epsilon_0 c \overline{E^2}$  داده می‌شود. اگر شدت<sup>۲۳</sup> را با  $\overline{S}$  نشان دهیم داریم:

$$\overline{S} = \left\{ \begin{array}{c} \text{شدت} \\ \text{یا} \\ \text{انرژی/سطح/زمان} \end{array} \right\} = \epsilon_0 c \overline{E^2}, \quad (28.31)$$

که bar به معنی میانگین زمان است. این نتایج خوبی برای تئوری شاخص انعکاس می‌باشد!

<sup>23</sup>intensity

## ۶.۳۱ پراش نور از توری پراش

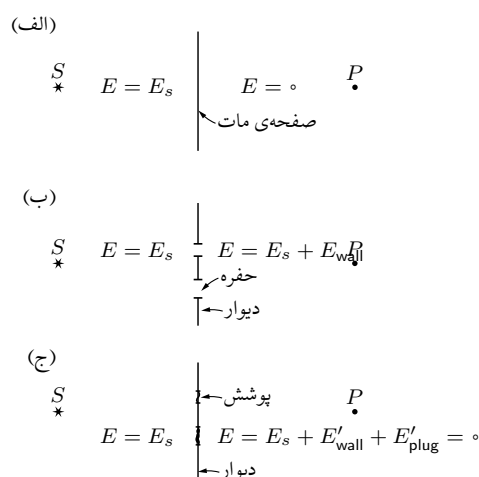
حال زمان خوبی است تا بتوانیم موضوع را از دیدگاه متفاوتی ببینیم و این کار را می‌توان با مکانیسمی که در این فصل با آن رو به رو می‌شویم، بدست آوریم. در فصل قبل گفتیم که زمانی که یک صفحه‌ی کدر داشته باشیم، نور می‌تواند از بعضی روزنه‌ها عبور کند و توزیع شدت (الگوی پراش) را می‌تواند با تصور اینکه مثلاً به جای روزنه‌ها از منابعی (اسیلاتورهایی) با توزیع یکنواخت‌تری از سوراخ‌ها استفاده کرد، به دست آورد. به عبارت دیگر موج پراکنده از روزنه، کاملاً مشابه موج پراکنده از منبع است. ما باید دلیل این مساله را توضیح دهیم، زیرا در مورد روزنه‌ها هیچ چشمه‌ای وجود ندارد؛ در واقع هیچ بار شتاب داری وجود ندارد.

اجازه دهید اول این سوال را مطرح کنیم که "صفحه‌ی کدر چیست؟" فرض کنیم یک توری کاملاً کدر بین چشمه‌ی  $S$  و مشاهده‌گر در نقطه‌ی  $P$  وجود دارد؛ مشابه شکل ۶.۳۱ (الف) اگر صفحه کدر باشد، هیچ میدانی در نقطه‌ی  $P$  وجود نخواهد داشت!

دلیل عدم وجود میدان چیست؟ مطابق اصول اساسی، ما باید یک میدان، مشابه میدان تاخیری  $E_S$  از چشمه و میدان ناشی از همه‌ی بارهای موجود در اطراف نقطه‌ی  $P$  داشته باشیم. اما همانطور که در بالا هم دیدید حرکت بارها روی صفحه به وسیله‌ی میدان  $E_S$  تنظیم می‌شوند و این حرکات یک میدان جدید ایجاد می‌کند. در صورتی که با یک توری کدر مواجه باشیم، دقیقاً میدان  $E_S$  در پشت صفحه را کنسل می‌کند. به نظر این تعادل به معجزه شباهت دارد! فرض کنید که این مبحث به طور دقیق، درست مطرح نشده باشد. (در نظر داشته باشید که صفحه کدر دارای ضخامت است.) در این صورت میدان دقیقاً در قسمت پشتی صفحه صفر نخواهد بود! از آنجا که میدان صفر نمی‌گردد، متقابلاً باید بارهای ماده‌ی توری حرکات خود را جوری تنظیم کنند که باعث افزایش اندکی در میدان شوند و در مجموع به تعادل برسند. پس اگر صفحه به اندازه‌ی کافی ضخیم باشد، از آنجا که فرصت کافی برای ساکن شدن بارها وجود دارد هیچ میدان مازادی وجود نخواهد داشت. در چارچوب فرمول‌بندی بالا، ما می‌توانیم درباره‌ی صفحه‌ای با شاخصی بزرگ و موهومی صحبت کنیم. در این صورت موج به صورت نمایی در هنگام عبور از صفحه جذب می‌گردد. البته که صفحه ورقه‌ای به اندازه‌ی کافی نازک از ماده‌ی کدر است. حتی ماده‌ای مانند طلا هم شفافیت دارد.

حال به ملاحظه‌ی آنچه برای یک صفحه‌ی مات که دارای روزنه‌هایی روی آن است، شکل ۶.۳۱ (ب) می‌پردازیم. برای میدان در نقطه  $P$  چه انتظاری دارید؟ میدان در نقطه  $P$  می‌تواند جمع دو میدان، یکی میدان ناشی از چشمه  $S$  به اضافه‌ی میدان ناشی از دیواره‌ها (یعنی میدان ناشی از حرکت بارها در دیواره‌ها) باشد. ممکن است انتظار داشته باشیم که حرکت بارها در دیواره‌ها پیچیده باشد اما می‌توان با یک رهیافت ساده میدان‌های تولیدی توسط دیواره‌ها را یافت.

فرض کنید صفحه‌ای مشابه داریم اما با روزنه‌هایی، که به وسیله‌ی پوششی پوشانده شده است. همانطور که در بخش ج از شکل مشاهده می‌کنیم؛ در نظر می‌گیریم که جنس پوشش‌ها مشابه جنس دیواره است. همان طور که در قسمت ب ملاحظه می‌کنید، پوشش‌ها در محل روزانه‌ها قرار می‌گیرند! حال اجازه دهید



شکل ۳۱.۶: پراش به وسیله‌ی توری

مقدار میدان را در نقطه  $P$  بیابیم. مطمئناً میدان در نقطه  $P$  در قسمت ج صفر می‌باشد که می‌توان چنین گفت که معادل با میدان ناشی از پوشش‌ها نیز است، در واقع می‌توان گفت میدان نشئت گرفته از همه‌ی حرکات اتم‌های موجود در دیواره‌ها و پوشش‌ها می‌باشد! و می‌توان معادلات زیر را نوشت:

$$E_{at P} = E_s + E_{wall} \quad \text{حالت (ب):}$$

$$E'_{at P} = 0 = E_s + E'_{wall} + E'_{plug} \quad \text{حالت (ج):}$$

که اولویت مربوط به قسمتی است که میدان ناشی از پوشش روزنه‌ها نقش دارد و البته که در هر دو مورد مشابه می‌باشد. حال در صورتی که دو معادله بالا را از یکدیگر کم کنیم داریم:

$$E_{at P} = (E_{wall} - E'_{wall}) - E'_{plug}.$$

درحالی که که روزنه‌ها خیلی کوچک نباشند، از طول موج‌های اطراف سخن به میان می‌آید. ما انتظار نداریم که وجود پوشش‌های روزنه‌ها میدانی که به دیواره‌ها می‌رسد را تغییر دهد، مگر این که احتمالی برای سدهای اطراف روزنه‌ها در نظر بگیرد. با چشم‌پوشی از این اثرکوچک، می‌توان به رسیدن  $E_{wall} = E'_{wall}$  رسید.

$$E_{at P} = -E'_{plug}.$$

ما به این نتیجه می‌رسیم که میدان در نقطه  $P$  زمانی که روزنه‌های موجود در صفحه (مورد ب) مشابه یکدیگرند؛ (بجز در علامت) همانند میدانی است که به وسیله‌ی دیواره‌ی کاملاً ماتی که در آن روزنه‌هایی واقع شده است می‌باشد. علامت نقش مهمی برای ما ندارد، زیرا که ما در واقع به شدت میدان، که متناسب

با مربع میدان است علاقمند هستیم. بنابراین گرچه کاملاً درست نیست اما مفید واقع می‌شود (نه برای روزنه‌هایی با اندازه کوچک) و برای تئوری پراکندگی ما رضایت بخش است.

میدان  $E'_{\text{plug}}$  برای هر مورد، به طور خاص با در نظر گرفتن حرکت بارها در هر مکانی از صفحه، برای کنسل کردن میدان  $E_s$  در قسمت پشت صفحه قابل محاسبه می‌باشد! با توجه به اینکه از حرکت بارها اطلاع داریم، می‌دانیم که میدان‌های تابشی در نقطه  $P$  فقط ناشی از بارهای موجود در پوشش‌هاست.

شایان یادآوری دوباره است، که تئوری پراکندگی به صورت تقریبی هستند و با تقریب خوبی برای روزنه‌هایی که خیلی کوچک نمی‌باشد مناسب است. زمانی که روزنه‌ها خیلی کوچک باشند، جمله  $E'_{\text{plug}}$  کوچک می‌شود و ممکن است تفاوت بین  $E'_{\text{wall}}$  و  $E_{\text{wall}}$  (که اختلاف این دو میدان را صفر گرفتیم) قابل مقایسه یا بزرگ‌تر از جمله‌ی کوچک شود و در چنین حالتی تقریب ما دیگر کارا نخواهد بود.

SUMMARY LECT. 24. RESONANCE

Oscillating quantities can be represented as the real part of complex no.  
 For example the oscillation  $A = A_0 \cos(\omega t + \delta)$  is rep. as real part of  $\hat{A} e^{i\omega t}$   
 where  $\hat{A} = A_0 e^{i\delta}$

Forced osc. with damping  $m(\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x) = F$  with  $F = \hat{F} e^{i\omega t}$

has solution  $x = \hat{x} e^{i\omega t}$  where  $m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) \hat{x} = \hat{F}$   $\frac{d}{dt} \rightarrow i\omega$

$\hat{x} = \frac{1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \hat{F} = \rho e^{i\delta} \hat{F}$

Elect. Circuit

$L \frac{dI}{dt} \rightarrow i\omega L$   $R I \rightarrow R$   $\frac{1}{C} \frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{1}{i\omega C}$   $E = \hat{I} Z$