شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 30

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۳۰

مترجم: معصومه عالی جوانانگروه

ویراستار: زهره رشنوادی

حروف‌چین: علی باقری کوچکسرائی

نسخه‌ی ۱.۰ پاییز ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۳۰

پراش

۱.۳۰ گسترهٔ (دامنهٔ) نتایج با توجه به n نوسانگر مشابه

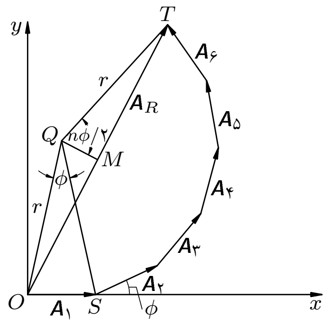
این فصل با وجود تغییر نام از تداخل به پراش، ادامهٔ فصل قبل است. تا به حال کسی اختلاف میان تداخل و پراش را به طور رضایت‌بخشی بیان نکرده است و در کل اختلاف اساسی میان آن‌ها وجود ندارد. بهترین بیان این است که بگوییم، اگر با تعداد کمی منبع، به عنوان مثال دو منبع، سروکار داشته باشیم، اصطلاح تداخل و در صورت وجود تعداد زیادی منبع، اصطلاح پراش به کار می‌رود. در این صورت بدون داشتن نگرانی از اینکه مسئلهٔ مورد نظر، تداخل یا پراش است، آن را از همان جایی که فصل قبل را نیمه کاره رها کردیم ادامه می‌دهیم.

حالا n نوسانگر با دامنهٔ یکسان اما فازهای متفاوت را در نظر خواهیم گرفت، علت این اختلاف حرکت در فازهای متفاوت و یا نگاه کردن به آن‌ها تحت زاویه‌ای خاص است، به طوری که باعث اختلاف در زمان می‌شود. می‌بایستی چیزی شبیه رابطهٔ زیر به آن اضافه گردد:

$$R = A[\cos \omega t + \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + ۲\phi) + \cdots + \cos(\omega t + (n - ۱)\phi)], \quad (۱.۳۰)$$

ϕ اختلاف فاز میان هر نوسانگر با نوسانگر کناری آن است، به ازای یک جهت خاص $\phi = \alpha + ۲\pi d \sin\theta / \lambda$ دیده می‌شود. تمامی جملات بایستی با هم جمع گردند و این کار به صورت هندسی انجام می‌گیرد. جملهٔ اول با طول A و فاز صفر است، جملهٔ دوم باز هم دارای طول A و اختلاف فاز ϕ است و جملهٔ بعدی دارای طول A و اختلاف فاز ۲ϕ است و به همین ترتیب تا آخر ادامه می‌یابد، بنابراین ما در حال حرکت پیرامون یک چندضلعی هستیم (شکل ۱.۳۰).

تمام رئوس بر روی دایره‌ای قرار می‌گیرد و می‌توان دامنه برآیند را به سادگی با یافتن شعاع دایره پیدا کرد. فرض کنید Q مرکز دایره باشد، آنگاه زاویهٔ OQS دقیقاً زاویهٔ ϕ است، این امر به خاطر تشابه رابطهٔ



۱.۳۰. بردار دامنهٔ نوسان $n=۶$ منبع با فواصل مساوی و اختلاف فاز ϕ هر بردار نسبت به بردار قبل

هندسی در انتقال شعاع QS با $A_۲$ و انتقال QO با $A_۱$ هست که زاویهٔ ϕ میان آن‌ها شکل می‌گیرد. بدین ترتیب شعاع ثابت r بایستی به نحوی $A=۲r\sin\phi/۲$ را تأمین کند. اما زاویهٔ بزرگ OQT مساوی با $n\phi$ است که $A_R=۲r\sin n\phi/۲$ را تأمین خواهد کرد. با ترکیب این دو برای حذف r نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$A_R = A\,\frac{\sin n\phi/۲}{\sin\phi/۲}. \qquad (۲.۳۰)$$

شدت حاصل نیز به قرار زیر است:

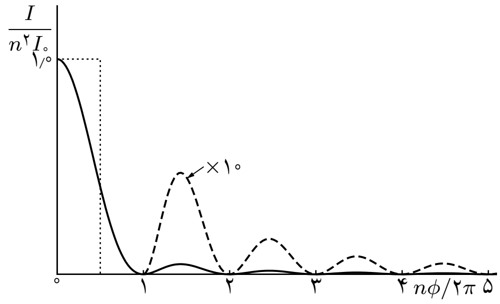
$$I = I_۰\,\frac{\sin^۲ n\phi/۲}{\sin^۲\phi/۲}. \qquad (۳.۳۰)$$

در ادامه، این روابط را بررسی و برخی از نتایج آن را مطالعه می‌کنیم. به ازای $n=۱$ نتیجه $I=I_۰$ و به ازای $n=۲$ با در نظر گرفتن $\sin\phi=۲\sin\phi/۲\cos\phi/۲$ نتیجهٔ $A_R=۲A\cos\phi/۲$ به‌دست می‌آید که در توافق با رابطهٔ (۱۲.۲۹) است.

دستیابی به شدت بیش‌تر در یک جهت خاص نسبت به سایر جهت‌ها با افزودن چندین منبع فراهم شده است. در صورت وجود دو منبع، حداکثر نزدیکی باعث کاهش شدت خواهد شد. به منظور مشاهدهٔ این اثر، منحنی مربوط به رابطهٔ (۳.۳۰) را در نزدیکی $\phi=۰$ رسم و مقدار n را تا حد امکان بزرگ انتخاب می‌کنیم. اگر ϕ دقیقاً صفر اختیار گردد، ۰/۰ به دست می‌آید اما ϕ مقداری بسیار کوچک است، همچنین نسبت دو مربع سینوس با توجه به اینکه سینوس و زاویه تقریباً مساوی‌اند، $n^۲$ بوده و بیشینهٔ شدت منحنی برابر با $n^۲$ ضرب در شدت نوسانگر است. بررسی این امر ساده است، اگر همگی آن‌ها در یک فاز باشند، بردارهای کوچک زاویهٔ نسبی ندارند و تمام n تا از آن‌ها با هم جمع می‌شوند، بنابراین دامنهٔ n برابر و شدت، $n^۲$ برابر قوی‌تر است.

با افزایش ϕ نسبت دو سینوس شروع به کاهش کرده و برای اولین بار به ازای $n\phi/۲=\pi$ با توجه به $\sin\pi=۰$، صفر می‌شود. به عبارت دیگر، $\phi=۲\pi/n$ متناظر با اولین کمینه در منحنی شکل ۲.۳۰ است.

در واقع بنابر آنچه برای پیکان‌های شکل ۱.۳۰ در حال رخ دادن است، اولین کمینه، زمانی رخ خواهد داد که همه پیکان‌ها به نقطهٔ شروع برمی‌گردند؛ یعنی مجموع زاویه در تمام پیکان‌ها، یا اختلاف فاز کلی میان نوسانگر اول و آخر، بایستی برابر با ۲π باشد تا دایره کامل گردد.

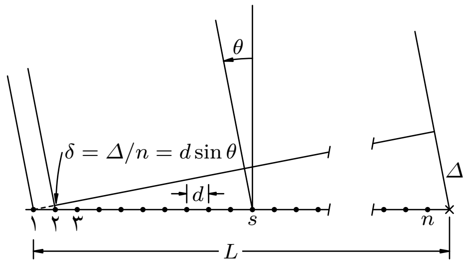


۲.۳۰. شدت به عنوان تابعی از زاویهٔ فاز به ازای تعداد زیادی از نوسانگرها با شدت مساوی

در ادامه، به مطالعهٔ بیشینهٔ دوم می‌پردازیم و می‌خواهیم ببینیم که آیا همانگونه که انتظار داریم خیلی کوچک‌تر از اولی است یا نه. از آنجایی که مقدار عددی و اسمی (۳.۳۰) متفاوت‌اند، دقیقاً نقطهٔ بیشینه را بررسی نخواهیم کرد. $\sin \phi/۲$ در مقایسه با $\sin n\phi/۲$ به ازای n بزرگ، کاملاً آرام تغییر می‌کند و در صورت برقراری $\sin n\phi/۲ = ۱$، به بیشینه نزدیک می‌شویم. بیشینهٔ بعدی مربوط به $\sin^۲ n\phi/۲$، در نقطهٔ $n\phi/۲ = ۳\pi/۲$ یا $\phi = ۳\pi/n$ رخ می‌دهد و متناظر با پیکان‌هایی است که دایره را یک و نیم بار دور زده‌اند. با جایگذاری $\phi = ۳\pi/n$ در فرمول، اندازهٔ بیشینهٔ $\sin^۲ ۳\pi/۲ = ۱$ به لحاظ عددی به دست می‌آید که به لحاظ اسمی نیز $\sin^۲ ۳\pi/۲n$ را داریم. حال اگر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، زاویه، بسیار کوچک و سینوس آن برابر با خود زاویه است و به ازای تمامی اهداف خاص می‌توان $\sin ۳\pi/۲n = ۳\pi/۲n$ را قرار داد. بدین ترتیب شدت در این مقدار بیشینه برابر با $I = I_۰(۴n^۲/۹\pi^۲)$ به‌دست می‌آید. شدت بیشینه برابر با $n^۲ I_۰$ و $۴/۹\pi^۲$ برابر آن یا حدود ۰/۰۴۵ کمتر از ۵ برابر بیشینهٔ شدت است. البته شدت‌های خروجی کمتری نیز مشاهده می‌شود. بنابراین یک بیشینهٔ مرکزی بسیار تیز با مقادیری بسیار ضعیف در طرفین آن وجود دارد.

امکان به دست آوردن سطح کل منحنی اعم از تمام پستی بلندی‌های کوچک وجود دارد که برابر با $۲\pi n I_۰$ یا دو برابر ناحیهٔ خط‌چین مستطیلی در شکل ۲.۳۰ است.

در ادامه، نحوهٔ به کار گرفتن معادلهٔ (۳.۳۰) در شرایط مختلف را بیش‌تر شرح خواهیم داد و سعی می‌کنیم بفهمیم که چه اتفاقی می‌افتد. فرض کنید تمام منابع مطابق شکل ۳.۳۰ بر روی یک خط باشد. تعداد n تا از آن‌ها به فاصلهٔ d از همدیگر قرار گرفته‌اند و فاز نسبی ذاتی هر کدام نسبت به نزدیک‌ترین همسایهٔ خود برابر با α است. همانگونه که قبلاً نیز در این مورد صحبت کردیم، اگر در یک جهت مشخص θ نسبت به جهت نرمال، مشاهده‌ای را انجام دهیم، به علت تأخیر زمانی میان هر دو خروجی متوالی، فاز



۳.۳۰. آرایهٔ خطی از n نوسانگر مساوی، در حال حرکت با فاز $\alpha_s = s\alpha$.

اضافی به اندازهٔ $۲\pi d\sin\theta/\lambda$ وجود خواهد داشت. بدین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}\phi &= \alpha + ۲\pi d\sin\theta/\lambda \\ &= \alpha + kd\sin\theta.\end{aligned} \tag{۴.۳۰}$$

در مرحلهٔ نخست فرض کنیم $\alpha = ۰$ باشد. در این شرایط تمام نوسانگرها در یک فاز قرار دارند و ما می‌خواهیم علت تابعیت زاویهٔ θ برای شدت را بدانیم. برای این منظور بایستی $\phi = kd\sin\theta$ را در رابطهٔ (۳.۳۰) جایگذاری کرده و اتفاقات را بررسی کنیم. در مکان اول بیشینه‌ای به ازای $\phi = ۰$ وجود دارد. یعنی اگر همهٔ نوسانگرها در یک فاز باشند، در راستای $\theta = ۰$ شدتی قوی ایجاد می‌شود. یک سؤال جالب اینکه، اولین کمینه کجا قرار دارد؟ این اتفاق به ازای $\phi = ۲\pi/n$ رخ می‌دهد. به عبارت‌دیگر، در صورت برقراری $۲\pi d\sin\theta/\lambda = ۲\pi/n$، اولین کمینه در منحنی ایجاد خواهد شد که با حذف ۲πها بهتر دیده می‌شود:

$$nd\sin\theta = \lambda. \tag{۵.۳۰}$$

در ادامه دلیل فیزیکی وجود کمینه در این نقطه را درک خواهیم کرد. nd طول کل رشته و برابر با L است. مطابق شکل ۳.۳۰ رابطهٔ $\Delta = L\sin\theta = nd\sin\theta$ برقرار است و رابطهٔ (۵.۳۰) در صورت برابری Δ با طول موج به کمینه خواهد رسید. حالا سؤال اینجاست که چرا به ازای $\Delta = \lambda$ به کمینه می‌رسیم؟ این امر به علت مشارکت نوسانگرهای مختلفی است که به‌طور یکنواخت از فاز ۰ تا ۳۶۰ درجه توزیع شده‌اند. در شکل ۱.۳۰ پیکان‌ها دور دایره‌ای می‌گردند و در همهٔ جهت‌ها بردارهایی مساوی را اضافه می‌کنیم تا مجموع آن‌ها صفر شود، بنابراین زاویهٔ کمینه‌ای را در $\Delta = \lambda$ خواهیم داشت که اولین کمینه نیز هست.

در مورد فرمول (۳.۳۰) مشخصهٔ مهم دیگری نیز وجود دارد. اگر زاویهٔ ϕ با ضریب ۲π افزایش یابد، تفاوتی در رابطه ایجاد نمی‌شود. از این رو به بیشینه‌های دیگری به ازای $\phi = ۲\pi$ و ۴π و ۶π و... خواهیم رسید و در نزدیکی هر کدام از این بیشینه‌ها منحنی تکرار خواهد شد. ممکن است از خود سؤال کنیم شرایط هندسی که منجر به این بیشینه می‌شود، چیست؟ جواب $\phi = ۲\pi m$ است به گونه‌ای که $۲\pi d\sin\theta/\lambda = ۲\pi m$ و m هر مقداری می‌تواند داشته باشد، که با تقسیم بر ۲π به صورت زیر درمی‌آید:

$$d\sin\theta = m\lambda. \tag{۶.۳۰}$$

این رابطه شبیه به رابطهٔ (۵.۳۰) به نظر می‌رسد. اما آن رابطه به شکل $nd\sin\theta = \lambda$ و اختلاف در بررسی منابع مجزا بود. $d\sin\theta = m\lambda$ بدین معنی است که زاویهٔ θ را به گونه‌ای داریم که $\delta = m\lambda$ برقرار باشد. به‌عبارت‌دیگر، هر منبعی به مقدار مشخصی، همکاری می‌کند و این مشارکت پی‌درپی آن‌ها خارج از موضوع فاز به وسیلهٔ ضریبی از ۳۶۰ درجه است. بنابراین همگی منابع در فاز و نتیجهٔ نهایی مشارکت می‌کنند و همان‌طور که قبلاً نیز شرح داده شده است، بیشینه برای منبعی خواهد بود که در آن $m = ۰$ است. پستی و بلندی‌های فرعی، کل شکل و ریخت منحنی، و کمینه در هر طرف دقیقاً شبیه موردی در نزدیکی $\phi = ۰$ است. چنین آرایه‌ای، پرتوهایی را در جهت‌های مختلف خواهد فرستاد، هر پرتو یک بیشینهٔ مرکزی بزرگ و تعدادی لبهٔ جانبی ضعیف خواهد داشت. پرتوهای قوی متفاوت به پرتوهای مرتبهٔ صفرم، پرتوهای مرتبهٔ اول و... منسوب می‌شوند. مرتبه بستگی به مقدار m دارد، به m، مرتبهٔ پرتو گفته می‌شود.

توجه خود را به مورد d کمتر از λ متمرکز می‌کنیم، در این صورت معادلهٔ (۶.۳۰) جوابی به غیر از $m = ۰$ ندارد، بنابراین اگر فاصله خیلی کوچک باشد امکان وجود فقط یک پرتو مرتبهٔ صفرم حاصل در زاویهٔ $\theta = ۰$ هست. (البته پرتو دیگری نیز در جهت مثبت وجود دارد.) به منظور به‌دست آوردن بیشینه‌های فرعی بایستی فاصلهٔ d آرایه بزرگ‌تر از طول‌موج باشد.

۲.۳۰ توری پراش

یکسان‌سازی فاز نوسانگرهای کوچک یا آنتن‌ها در کارهای حرفه‌ای با آنتن‌ها و سیم‌ها امکان‌پذیر است. حال سؤال اینجاست که آیا می‌توان و اگر بتوان چگونه می‌توان چنین کاری را با نور انجام داد. در زمان حاضر ساخت ایستگاه رادیویی با فرکانس‌های نوری و با به دام انداختن آن‌ها در سیم‌های بی‌نهایت کوچک و وادار کردن آن‌ها به حرکت با فاز مشترک امکان‌پذیر نیست. اما روش ساده‌تری وجود دارد که به نتیجهٔ مشابه منجر می‌شود.

وجود سیم‌های موازی با فاصله‌های مساوی به اندازهٔ d از یکدیگر و منبع فرکانس رادیویی در فاصله‌ای بسیار دور از آن‌ها، منبع میدان الکتریکی تولید خواهد کرد، که به هر یک از سیم‌ها با فاز یکسانی می‌رسد (زمان تأخیر برای تمام سیم‌ها یکسان است). (می‌توانید با آرایه نیز کار کنید اما اینجا ما با یک مورد کار خواهیم کرد.) میدان الکتریکی خارجی، الکترون‌ها را در سیم‌ها به سمت بالا و پایین می‌راند. میدانی که از منبع اصلی می‌آید، الکترون‌ها را در راستای عمودی به لرزه درمی‌آورد و این حرکت بیانگر منابع جدید است. این پدیده که موج نوری حاصل از یک منبع منجر به تحریک الکترون‌ها در یک تکه از ماده می‌شود و حرکت آن‌ها موج خودشان را تولید می‌کند، پراش نامیده می‌شود. بنابراین لازم است که سیم‌های زیادی را به فواصل مساوی نصب کنیم و آن‌ها را به منبع فرکانس رادیویی موجود در فاصلهٔ بسیار دور برسانیم، بدین ترتیب بدون سیم‌کشی خاصی آنچه را که می‌خواهیم به‌دست می‌آوریم. اگر انتشار عادی باشد، تمام فازها مساوی خواهند بود و دقیقاً به شرایطی که شرح دادیم خواهیم رسید. اگر فاصلهٔ سیم بزرگ‌تر از طول‌موج

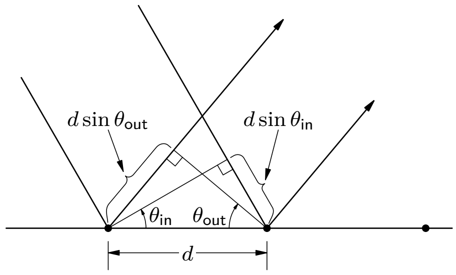
باشد به شدت بیش‌تری از پراش در جهت نرمال می‌رسیم و شرایط دیگر از رابطهٔ (۶.۳۰) به‌دست می‌آید.

این کار با نور نیز می‌تواند انجام گیرد. به جای سیم‌ها از تکهٔ صافی از شیشه استفاده کرده و شکاف‌هایی در آن ایجاد می‌کنیم به طوری که هر یک از شکاف‌ها اندکی متفاوت نسبت به بقیهٔ شیشه پراش می‌کند. اگر نور را به شیشه بتابانیم، هر کدام از شکاف‌ها به عنوان منبع عمل خواهد کرد و اگر خطوط را خیلی ریز اما نه نزدیک به طول‌موج قرار دهیم، آنگاه پدیده‌ای معجزه‌آسا را می‌بینیم. نور نه فقط از مسیر مستقیم عبور می‌کند، بلکه پرتو پررنگی در زاویهٔ مشخصی وجود خواهد داشت که وابسته به فاصله شکاف‌ها است. چنین ابزاری ساخته شده و مورد استفاده نیز هست، و به آن توری پراش گفته می‌شود.

در یکی از انواع آن، یک توری پراش چیزی جز ورق شیشه‌ای شفاف و بی‌رنگ هواپیما با خراش‌هایی بر روی آن نیست. گاهی اوقات از چند صد تا میلیون‌ها شکاف روی آن وجود دارد، که مرتب و با فاصلهٔ مساوی در کنار هم چیده شده‌اند. تأثیر چنین توری در ترتیب دادن یک عملگر تصویر دیده می‌شود به طوری که یک خط نازک عمودی نور بر روی پرده می‌اندازد. در صورتی که توری را به‌گونه‌ای که شکاف‌هایش به‌طور عمودی باشند، در مسیر پرتو قرار می‌دهیم، می‌بینیم که خط هنوز هم در آنجا است، اما در همان سمت، لکهٔ قوی رنگی دیگری نیز وجود دارد. این امر تصویر شکاف پراکنده شده در محدودهٔ وسیعی از زاویه است، زیرا زاویهٔ θ مطابق رابطهٔ (۶.۳۰) به λ بستگی دارد و نور با رنگ‌های مختلف حاصل از اختلاف در فرکانس آن‌ها و در نتیجه طول موج‌شان است. بزرگ‌ترین طول موج مرئی، قرمز است و طبق رابطهٔ $\lambda = d\sin\theta$ بیش‌ترین زاویه را لازم دارد و می‌بینیم که رنگ قرمز در زاویهٔ بزرگ‌تری از مرکز تصویر قرار دارد. بدین ترتیب بایستی پرتو دیگری در سمت دیگر باشد و آن را بر روی پرده ببینیم. ممکن است جواب دیگری برای رابطهٔ (۶.۳۰) به ازای $m = ۲$ وجود داشته باشد. چیزهای مبهم دیگری، حتی پرتو دیگری با شدت بسیار کم نیز می‌بینیم.

در این مورد بحث کردیم که تمام پرتوها بایستی شدت یکسانی داشته باشند. اما حال چنین چیزی را نمی‌بینیم و حتی اولین پرتوها در سمت چپ و راست نیز برابر نیستند. زیرا توری برای انجام این کار به‌دقت ساخته شده است. چطور؟ اگر توری شامل شکاف‌های ریز و عرض بسیار کم باشد تمام شدت‌ها برابر می‌شوند. در واقع ما ساده‌ترین مورد را انتخاب کرده‌ایم و می‌توانستیم آرایه‌ای از جفت آنتن‌ها را اختیار کنیم که هر کدام شدت مشخص و فاز نسبی داشته باشد. در این صورت، گرفتن شدت متفاوت در مراتب مختلف میسر می‌شود. در برخی مواقع، توری با دندانه‌های کوچکی ساخته می‌شود و بسیاری از نور در جهت خاصی نسبت به بقیهٔ جهت‌ها فرستاده می‌شود. برای توری خاص علاقه‌مندیم نور را تا جایی که ممکن است در یک جهت داشته باشیم. این کار پیچیده به نظر می‌رسد اما به خاطر کاربردهای زیاد توری مفید است.

بدین ترتیب، شرایطی در نظر گرفتیم که فاز همهٔ منابع برابرند. اما رابطه‌ای برای ϕ داریم که اختلاف فاز یکی از آن‌ها نسبت به دیگری با α بیان می‌شود. این امر مستلزم سیم‌کشی با اندک اختلاف فازی میان آن‌هاست. آیا انجام این کار با نور امکان‌پذیر است؟ اگر فرض کنیم منبع نوری در بی‌نهایت تحت زاویه‌ای وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که نور تحت زاویهٔ θ_{in} بتابد، این امر به سادگی ممکن است. می‌خواهیم پرتو



۴.۳۰. اختلاف مسیر برای اشعهٔ پراکنده شده از همسایهٔ مجاور توری برابر با $d\sin\theta_{\text{out}} - d\sin\theta_{\text{in}}$ است.

پراکنده شده را شرح دهیم و زاویهٔ خروجی θ_{out} را بیابیم. θ_{out} موجود در اینجا همان θ است که قبلاً نیز داشتیم اما θ_{in} صرفاً ابزاری برای مرتب کردن فاز هر منبع و متنوع است، به عبارتی نور خروجی از منبع ابتدا به خراشی برخورد می‌کند و بارها و بارها این اتفاق رخ می‌دهد و در نهایت با فازی از یکی نسبت به دیگری اختلاف پیدا می‌کند، و رابطهٔ $\alpha = -۲\pi d\sin\theta_{in}/\lambda$ برقرار خواهد بود. بنابراین، فرمولی برای توری وجود دارد که نور با زاویه‌ای وارد و با زاویه‌ای دیگر خارج می‌شود و رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\phi = ۲\pi d\sin\theta_{\text{out}}/\lambda - ۲\pi d\sin\theta_{\text{in}}/\lambda. \tag{۷.۳۰}$$

در ادامه به یافتن مکان وقوع بیش‌ترین شدت می‌پردازیم. به ازای شدت قوی، ϕ می‌بایستی ضریبی از ۲π باشد. چندین نکتهٔ جالب وجود دارد که در ادامه به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

یکی از نکات جالب برای توری که فقط یک جواب هم برای آن وجود دارد، جایگاه متناظر با $m = ۰$ در صورت کوچک‌تر بودن d نسبت به λ است. در این مورد رابطهٔ $\sin\theta_{out} = \sin\theta_{in}$ برقرار است و بدین معنی است که نور در همان جهت تحریک شده در توری خارج می‌شود. ممکن است این برداشت شود که نور به طور مستقیم وارد می‌شود، ولی این نور متفاوت از چیزی است که ما بحث می‌کنیم و حاصل از پراکندگی (پراش) است. نور پراکنده شده در همان جهت نور اصلی خارج می‌شود و می‌تواند با آن تداخل داشته باشد، مشخصه‌ای که بعدها در مورد آن بحث می‌کنیم.

راه‌حل دیگری برای همین مورد وجود دارد. برای یک θ_{in} مشخص θ_{out} ممکن است مکمل θ_{in} باشد. بنابراین، نه‌تنها می‌توانیم پرتوی را در همان جهت پرتو وارد شده به‌دست آوریم، بلکه با بررسی دقیق می‌بینیم که در جهت دیگر هم زاویهٔ برخورد برابر با زاویهٔ پراکندگی می‌شود، این پرتو را پرتو بازتابی می‌نامیم.

در اینجا فهم دقیق سازوکار اصلی بازتاب را شروع می‌کنیم: نوری که وارد می‌شود باعث ایجاد حرکت اتم‌ها در بازتاب‌دهنده می‌شود، و بازتاب‌دهنده‌ای موج جدیدی را بازتولید می‌کند، و یکی از جواب‌ها برای جهت پراکندگی، و تنها جواب ممکن، اگر فاصله پراکنده‌کننده‌ها (پراکننده‌ها) در مقایسه با طول موج، کوچک باشد، زاویه‌ای است که برای نور خروجی و ورودی مشترک است.

در ادامه، مورد خاص $d \to ۰$ را بررسی می‌کنیم. یعنی فقط یک تکه جامد از ماده را با طول مشخص داریم. علاوه بر این می‌خواهیم فاز یک عامل پراکندگی نسبت به دیگری تغییر کند تا اینکه به صفر برسد.

به عبارت دیگر، آنتن‌های بیش‌تری را بین عامل‌ها قرار می‌دهیم، در این صورت هر یک از اختلاف فازها کوچک‌تر می‌شوند ولی تعداد آنتن‌ها به صورتی افزایش می‌یابد که کل اختلاف‌فاز، بین یک پایانه از خط و دیگری ثابت باشد. بیایید ببینیم اگر اختلاف فاز $n\phi$ را از یک پایانه به پایانهٔ دیگر، ثابت نگه‌داریم (یعنی $n\phi = \Phi$)، و اجازه دهیم عدد به بی‌نهایت میل کند و تغییر فاز ϕ از هر یک به صفر نزدیک شود، چه اتفاقی در رابطهٔ (۳.۳۰) رخ می‌دهد. ϕ خیلی کوچک است به‌گونه‌ای که $\sin\phi = \phi$ است، و اگر $n^۲ I_۰$ را به‌صورت I_m در نظر بگیریم، توان و شدت بیشینه در مرکز پرتو، برابر با معادلهٔ زیر می‌شود:

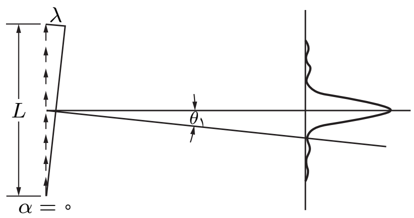
$$I = ۴I_m \sin^۲ \tfrac{۱}{۲}\Phi/\Phi^۲. \qquad (۸.۳۰)$$

این مورد حدی در شکل ۲.۳۰ نشان داده شده است.

در چنین شرایطی، همان تصویر کلی را برای فاصله متناهی $d > \lambda$ به‌دست می‌آوریم. همهٔ لبه‌های کناری عملاً مثل قبل یکسان هستند، اما بیشینهٔ مرتبهٔ بالاتر وجود ندارد. اگر تمام عامل‌های پراکنندگی دارای فاز برابر باشند، در جهت $\theta_{out} = ۰$ به یک حد بیشینه، و در صورتی که فاصلهٔ Δ برابر با λ باشد به حد کمینه، درست مثل مورد n و d متناهی، می‌رسیم. بنابراین، می‌توانیم حتی یک توزیع متوالی از عامل‌های پراکنندگی یا نوسانگرها را با استفاده از انتگرال به جای جمع کردن، آنالیز کنیم.

به عنوان مثال فرض کنید خط طویلی از نوسانگرها وجود دارد که نیروی نوسان در جهت همان خط است، در شکل ۵.۳۰ بیش‌ترین توان، عمود بر خط است. توان کمی در بالا و پایین صفحهٔ معادل وجود دارد، ولی خیلی جزئی است، در نتیجه می‌توانیم شرایط پیچیده‌تری را در نظر بگیریم. فرض کنید مجموعه‌ای از این خطوط را داریم که هر یک فقط یک پرتو در صفحه عمود بر خط ایجاد می‌کنند. برای یافتن شدت در جهت‌های مختلف در عوضِ سیم‌های بی‌نهایت کوچک از یک سری سیم‌های طویل، به اندازه‌ای طولانی که در صفحهٔ مرکزی عمود بر سیم‌ها باشیم و فقط یک سری تصحیحات برای طویل بودن سیم‌ها در نظر بگیریم، استفاده می‌کنیم. به همین علت، هر چند فقط آنتن‌های ریز را آنالیز می‌کنیم، امکان استفاده از شکاف‌های باریک هم فراهم است. هر یک از شکاف‌های طولانی فقط در جهت خودشان، به طرف بالا و پایین تأثیر دارند ولی از آنجایی که همهٔ آن‌ها نزدیک به یکدیگر به صورت افقی تنظیم می‌شوند، بنابراین در میان‌شان تداخل ایجاد می‌شود.

شرایط پیچیده‌تر با توزیعات مختلف پراکننده‌هایی اعم از خطوط، صفحات یا فاصله ایجاد می‌شود.

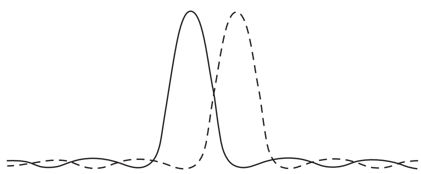


۵.۳۰. طرح شدت خط پیوسته‌ای از نوسانگرها با بیشینه‌ای قوی و تعدادی لبهٔ ضعیف

اولین چیزی که انجام دادیم، بررسی عامل‌های پراکنندگی در یک خط بود و فقط آنالیز را به باریکه تعمیم داده‌ایم و می‌توانیم این کار را با جمع‌کردن و افزودن تصحیحات به ازای پراکننده‌های منفرد انجام دهیم. اصل همیشه یکسان است.

۳.۳۰ توان تجزیه توری

حال در موقعیتی قرار داریم که چندین پدیدهٔ جالب را درک کنیم. به عنوان مثال استفاده از یک توری را برای پراکندگی طول موج‌ها در نظر بگیرید. با توجه به پراکنده شدن کل طیف بر روی صفحه، توری می‌تواند به عنوان ابزاری برای پراکندن نور با طول موج‌های مختلف مورد استفاده قرار گیرد. یکی از سؤالات جالب این است: فرض کنید که دو منبع با اندکی تفاوت در فرکانس یا طول موج وجود داشت، چقدر نزدیکی در طول موج می‌تواند به‌گونه‌ای عمل کند که توری قادر به تشخیص اختلاف دو طول موج نشود؟ قرمز و آبی به وضوح جدا می‌شوند، ولی وقتی یک موج قرمز و دیگری نسبتاً قرمزتر است، چقدر می‌توانند به هم نزدیک باشند؟ این مسئله، توان تجزیه توری نامیده می‌شود و برای آنالیز مسئله به صورت زیر عمل می‌شود. نوری به رنگ مشخص با بیشینهٔ پراکندگی پرتو در یک زاویهٔ خاص داریم، اگر طول موج را تغییر دهیم، به اندازهٔ $2\pi d\sin\theta/\lambda$ اختلاف فاز داشته و بیشینه نیز در زاویه‌ای متفاوت رخ می‌دهد، به همین دلیل است که پرتوهای آبی و قرمز جدا می‌شوند. اختلاف زاویه بایستی چقدر باشد تا بتوانیم آن را ببینیم؟ اگر دو بیشینه بر روی هم بیفتند، نمی‌توانیم آن‌ها را مشاهده کنیم، در صورت دوری، از همدیگر به اندازهٔ کافی، برخوردی دو برابری در توزیع نور دیده می‌شود. به منظور مشاهده این برخورد دو برابری معمولاً از مقولهٔ (معیار) سادهٔ زیر موسوم به مقولهٔ $Rayleigh$[1] استفاده می‌شود، که در شکل ۶.۳۰ آمده است. اولین کمینهٔ حاصل از برخورد باید در بیشینهٔ دیگری قرار گیرد. وقتی کمینهٔ یکی بر روی بیشینهٔ دیگری قرار می‌گیرد به سادگی می‌توان محاسبه کرد که چه مقدار اختلاف در طول موج وجود دارد. بهترین شیوه برای این کار روش هندسی است.



۶.۳۰. نمایشی از طرح $Rayleigh$. بیشینهٔ یک طرح بر روی کمینهٔ دیگری افتاده است.

به منظور داشتن یک بیشینه به ازای طول موج λ' فاصلهٔ Δ در شکل ۳.۳۰ باید برابر $n\lambda'$ و این فاصله در صورت تمرکز به پرتو mام برابر $mn\lambda'$ باشد. به عبارت دیگر $2\pi m = 2\pi d\sin\theta/\lambda'$، بنابراین

[1] معیار رایلی: محکی برای تشخیص توان تفکیک در مطالعات اپتیک.

$nd\sin\theta$ که برابر Δ است، $m\lambda'$ ضرب در n یا $mn\lambda'$ خواهد شد. برای پرتوهای دیگر با طول موج λ، می‌خواهیم در همین زاویه، کمینه‌ای داشته باشیم، یعنی Δ به اندازهٔ $mn\lambda$ بیش‌تر از طول موج λ یعنی $\Delta = mn\lambda + \lambda = mn\lambda'$ باشد. از این رو اگر $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ باشد، داریم:

$$\Delta\lambda/\lambda = 1/mn. \qquad (۹.۳۰)$$

نسبت $\lambda/\Delta\lambda$ توان تجزیهٔ توری نامیده می‌شود، که برابر با کل تعداد خطوط موجود در توری، ضرب در مرتبه است. اثبات این موضوع کار سختی نیست. این فرمول معادل با فرمولی است که در آن میزان خطا در فرکانس برابر با اختلاف زمان رفت و برگشتی در مسیرهای اکسترمم است که موجب تداخل می‌شوند:*

$$\Delta\nu = 1/T.$$

در حقیقت، این بهترین روش برای به خاطر سپردن است، زیرا فرمول اصلی نه فقط برای توری بلکه برای دیگر ابزار هم به کار می‌رود، در صورتی که فرمول خاص (۹.۳۰) وابسته به استفاده از توری است.

۴.۳۰ آنتن سهمی شکل

حالا مسئلهٔ دیگری را در مورد توان تجزیه توری در نظر می‌گیریم. این بررسی با آنتن رادیوتلسکوپی، که برای تعیین موقعیت منابع رادیویی در آسمان استفاده می‌شود، انجام می‌گیرد. این بدان معناست که زاویهٔ آن‌ها بسیار بزرگ است. در صورت استفاده از آنتن قدیمی برای یافتن سیگنال‌ها، جهت آن‌ها را پیدا نمی‌کردیم و ما علاقه‌مندیم بدانیم که آیا منبع در مکانی قرار دارد یا خیر. یک روش برای درک این امر، قرار دادن کل مجموعهٔ حاصل از سیم‌های دوقطبی که در فاصله‌های برابر از هم هستند، در منطقهٔ استرالیا است. بنابراین ما تمام سیم‌ها را از آنتن گرفته و آن‌ها را تا گیرندهٔ مشابهی جلو می‌بریم، در چنین حالتی همه‌ی تأخیرها در خطوط برابرند. از این رو گیرنده، سیگنال‌ها را از تمام دوقطبی‌ها با یک فاز دریافت می‌کند، یعنی تمام امواج حاصل از دوقطبی‌های با فاز یکسان را با هم جمع می‌کند. حالا چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر منبع به صورت مستقیم در آرایه باشد، در حد بی‌نهایت یا نزدیک به آن، امواج رادیویی تمام آنتن‌ها را در فاز یکسانی تحریک خواهد کرد و همگی با هم گیرنده را تغذیه می‌کنند.

حالا فرض کنید که منبع رادیویی در یک زاویهٔ کوچک θ نسبت به (خط) عمود قرار دارد. در این صورت هر کدام از آنتن‌ها در حال دریافت سیگنال‌هایی خارج از یک فاز هستند. گیرنده، همهٔ این سیگنال‌های خارج از فاز را با هم جمع می‌کند و در صورتی که θ بزرگ باشد، چیزی حاصل نمی‌شود. زاویه تا چه اندازه می‌تواند بزرگ باشد؟ پاسخ: اگر زاویه $\theta = \Delta/L$ (شکل ۳.۳۰) متناظر با تغییر فاز ۳۶۰ درجه باشد آن را صفر در نظر می‌گیریم که در این رابطه Δ طول موج λ است. علت این امر تشکیل چندضلعی با بردار برآیند صفر

*در این مورد $T = \Delta/c = mn\lambda/c$ با توجه به اینکه c سرعت نور و فرکانس $\nu = c/\lambda$، بنابراین $\Delta\nu = c\Delta\lambda/\lambda^2$.

در اثر تصحیحات بردارها است. کوچک‌ترین زاویه‌ای که می‌تواند با رشتهٔ آنتنی به طول L حل شود دارای اندازه‌ای برابر $\theta = \lambda/L$ است. توجه داشته باشید که الگوی دریافت چنین آنتنی مشابه توزیع شدتی است که اگر در کنار خود، گیرنده‌ای را روشن کرده و آن را به یک فرستنده تبدیل کنیم، دریافت خواهیم کرد. این مثالی از چیزی است که اصل متقابل نامیده می‌شود. معلوم می‌شود که برای هر آرایشی از آنتن‌ها، زاویه‌ها، و... درست است؛ اگر گیرنده به جای یک فرستنده قرار داشت، چه شدت نسبی در جهات گوناگون خواهد داشت؟ آنگاه حساسیت نسبی جهتی گیرنده با سیم‌کشی خارجی و آرایهٔ آنتن‌های مشابه با همان شدت نسبی گسیلی خواهد بود که در صورت فرستنده بودن رخ می‌دهد.

برخی از آنتن‌های رادیویی به روش‌های متفاوت ساخته شده‌اند. به جای داشتن تعداد زیادی از دوقطبی‌ها دارای یک خط طولانی با تعداد زیادی از سیم‌های تغذیه است و می‌توان آن‌ها را بر روی یک منحنی به جای خطی تنظیم کنیم و گیرنده را در نقطه‌ای خاص قرار دهیم تا بتواند امواج پراکنده شده را آشکارسازی کند. در این منحنی هوشمندانه سیم‌ها به‌گونه‌ای تنظیم‌شده‌اند که اگر امواج رادیویی از بالا به پایین برسند و سیم‌های پراکنده موج جدیدی ایجاد کنند، امواج پراکنده‌شده هم‌زمان به گیرنده می‌رسند (شکل ۲۶ــ۱۲). به عبارت دیگر، منحنی یک سهمی است و اگر منبع دقیقاً بر محور آن قرار گیرد قدرت بسیار زیادی در مرکز دریافت می‌کنیم. در اینجا توان تجزیهٔ چنین ابزاری را به‌وضوح درک کردیم. تنظیم آنتن‌ها بر روی یک سهمی نکتهٔ مهمی نیست، بلکه تنها راه مناسبی برای دریافت تمام سیگنال‌ها در یک نقطه، بدون تأخیر و بدون سیم تغذیه است. زاویهٔ حاصل از این روش $\theta = \lambda/L$ است، که L فاصلهٔ جدایی اولین و آخرین آنتن است و این رابطه به فاصلهٔ بین آنتن‌ها بستگی ندارد و ممکن است آنتن‌ها بسیار نزدیک به هم و یا همگی از یک قطعه فلز باشند. ما داریم یک آینهٔ تلسکوپ را توصیف می‌کنیم، توان تجزیهٔ یک تلسکوپ را پیداکرده‌ایم! گاهی اوقات توان تجزیه برابر $\theta = ۱٫۲۲\lambda/L$ است که L قطر تلسکوپ است. دلیل اینکه دقیقاً برابر λ/L نیست را می‌توان به صورت زیر شرح داد. در صورتی که تمام خطوط دوقطبی دارای شدت برابر باشند با رابطهٔ $\theta = \lambda/L$ کار می‌کنیم، اما زمانی که تلسکوپ دایره‌ای در اختیار داشته باشیم، روشی که معمولاً تلسکوپ بدان صورت تنظیم می‌شود تا سیگنال‌های زیادی از لبه‌های جانبی خارج نشود، از آنجایی‌که شبیه یک مربع نیست تا در تمام سطوح شدت یکسانی را به‌دست آوریم، شدت کمتری دریافت می‌کنیم. زیرا فقط در حال استفاده از بخشی از تلسکوپ هستیم؛ بدین ترتیب متوجه می‌شویم که قطر مؤثر اندکی کمتر از قطر واقعی است و این همان فاکتور ۱٫۲۲ است. به هر حال اندکی موشکافی برای قرار دادن چنین دقتی در فرمول توان تجزیه لازم است.*

*به این خاطر است که معیار $Rayleigh$ در درجهٔاول ایدهٔ دشواری است، و به شما می‌گوید که کجا گفتن اینکه آیا تصویر از یک یا دو ستاره تشکیل شده است، سخت است. در حقیقت، اگر اندازه‌گیری‌های توزیع چگالی بر روی یک لکه (نقطه) از تصویر پراکنده شده به اندازهٔ کافی دقیق باشد، این واقعیت که دو منبع آن لکه (نقطه) را به وجود آورده‌اند، حتی اگر θ کوچکتر از λ/L باشد، قابل اثبات است.

۵.۳۰ فیلم‌های رنگی؛ بلورها

برخی از اثرات تداخل حاصل از اضافه شدن امواج مختلف در بالا ذکر شد. اما مثال‌های دیگر نیز وجود دارد، حتی اگر ما هنوز سازوکار اساسی را درک نکنیم، بالاخره روزی متوجه می‌شویم که تداخل چگونه رخ می‌دهد. به عنوان مثال، هنگامی که یک موج نور به یک سطح از ماده با شاخص n برخورد می‌کند مقداری از نور منعکس می‌شود. ما هم‌اکنون در موقعیت درک دلیل انعکاس نیستیم، بعداً در مورد آن بحث خواهیم کرد. اما فرض کنید می‌دانیم مقداری از نور در هنگام ورود و خروج از یک منکسرکننده، منعکس می‌شود. پس اگر به انعکاس منبع نور در یک فیلم نازک نگاه کنیم، اجتماع دو موج را می‌بینیم؛ اگر ضخامت به اندازهٔ کافی کوچک باشد این دو موج یک تداخل سازنده یا مخرب وابسته به علامت فاز ایجاد می‌کنند. ممکن است برای مثال به ازای نور قرمز یک انعکاس سازنده و برای نور آبی که دارای طول موج متفاوت است، انعکاس مخرب را به‌دست آوریم، به طوری‌که انعکاس قرمز روشنی را می‌بینیم. اگر ضخامت را تغییر دهیم یعنی به سمت دیگر و ضخیم‌تر فیلم نگاه کنیم نتیجه ممکن است معکوس شود و تداخل قرمز و آبی یا سبز یا زرد و یا چیزهای دیگر ندارد. بنابراین زمانی که به فیلم‌های نازک نگاه کنیم رنگ‌ها را می‌بینیم و اگر از زوایای مختلفی نگاه کنیم رنگ‌ها تغییر خواهد کرد، زیرا ما می‌توانیم زمان‌بندی‌های متفاوتی را در زوایای مختلف ارزیابی کنیم. بدین ترتیب که صدها موقعیت دیگر شامل رنگ‌های روی فیلم‌های روغنی، حباب‌های صابون و... در زوایای مختلف به‌دست می‌آید. اصل، یکسان است و فقط امواج در فازهای مختلف را اضافه می‌کنیم.

یکی دیگر از کاربردهای مهم پراش را می‌توانیم در ادامه ذکر کنیم. ما از یک توری استفاده کردیم و تصویرهای مختلف را روی صفحه دیدیم که اگر از نور تک رنگ استفاده کرده بودیم در یک مکان خاص می‌بود و تصاویر مراتب بالاتر متفاوتی نیز وجود می‌داشت. با توجه به موقعیت تصاویر و با علم بر طول موج نور می‌توانیم فاصلهٔ میان خطوط توری را به‌دست آوریم. از روی اختلاف شدت تصاویر نیز می‌توان شکل خراش‌های توری را بدون دیدن آن درک کنیم که آیا صفحه از سیم و یا هر چیز دیگر ساخته شده است یا نه. این اصل برای کشف موقعیت اتم‌ها در یک کریستال استفاده می‌شود. تنها پیچیدگی مسئله، سه‌بعدی بودن کریستال سه‌بعدی است؛ و این تکرار آرایهٔ سه‌بعدی از اتم‌هاست. نمی‌توانیم از نور معمولی استفاده کنیم چراکه باید از چیزی استفاده کنیم که طول موج کوتاه‌تری از فضای بین اتم‌ها داشته باشد؛ بنابراین باید از تابش طول موج بسیار کوتاه، یعنی اشعه ایکس، استفاده کنیم. بنابراین با تابش اشعه ایکس به یک کریستال و با توجه میزان شدت انعکاس در مراتب مختلف و بدون دیدن اتم‌ها، ترتیب آن‌ها را تعیین کنیم. ترتیب اتم‌ها در سطوح مختلف این امکان را به ما می‌دهد تا تصاویر فصل اول، ترتیب اتم‌ها در نمک و غیره را بکشیم. به این موضوع برخواهیم گشت و در مورد جزئیات آن بحث خواهیم کرد، بنابراین ما در مورد این ایدهٔ فوق‌العاده، بیش‌تر نمی‌گوییم.

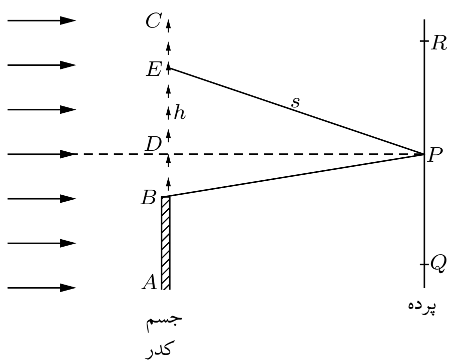
۶.۳۰ پراش به‌وسیلهٔ صفحه‌نمایش‌های مات

حال ما به موقعیت بسیار جالبی می‌رسیم. فرض کنید ورق ماتی با سوراخ‌هایی در آن و نوری در یک طرفش داریم. می‌خواهیم شدت نور را در طرف دیگر به‌دست آوریم. نور در داخل سوراخ می‌درخشد و اثری در طرف دیگر تولید می‌کند. اگر فرض کنیم منابع با چگالی یکسان در سوراخ‌های باز توزیع شده‌اند، فاز این منابع برابر با وقتی خواهد بود که ماده کدر بوده است. البته توجه داریم که هیچ منبعی در سوراخ‌ها وجود ندارد و این مکان تنها مکانی است که قطعاً منبع در آن وجود ندارد. با این اوصاف، ما طرح پراکندگی صحیحی را با در نظر گرفتن سوراخ‌ها به‌عنوان مکان‌های دارای منبع به‌دست می‌آوریم. بعدها علت درست بودن این امور را شرح خواهیم داد، اما برای این هدف اجازه دهید درست بودن آن را فرض بگیریم.

در نظریهٔ پراش، نوع دیگری از پراکندگی (پراش) نیز وجود دارد که به طور خلاصه شرح خواهیم داد. این امر معمولاً در ابتدای دوره شرح داده نمی‌شود، صرفاً به خاطر اینکه فرمول‌های ریاضی حاصل از افزودن این بردارهای کوچک اندکی بسیط است، وگرنه همان چیزی است که ما در کل داشتیم انجام می‌دادیم. تمام پدیده‌های تداخل مشابه‌اند و فقط شرایط پیچیده است و جمع بردارها با هم مشکل‌تر می‌شود.

نوری را در نظر بگیرید که از بی‌نهایت می‌آید و سایه‌ای از جسمی ایجاد کند، شکل ۷.۳۰ نشان می‌دهد که سایه جسم AB بر روی پرده‌ای توسط منبع نور بسیار دوری در مقایسه با طول موج آن افتاده است. انتظار داریم که خارج از سایه، شدت، درخشان و در داخل آن تاریک باشد. اگر شدت را به عنوان تابعی از موقعیت حوالی لبهٔ سایه رسم کنیم، شدت افزایش و سپس بیش‌ازحد افزایش و نوسان‌های زیاد و رفتارهای عجیب و غریب نزدیک لبه رخ می‌دهد (شکل ۹.۳۰). دلیل این امر را شرح خواهیم داد. اگر از قضیه‌ای که هنوز اثباتش نکرده‌ایم، استفاده کنیم؛ می‌توانیم مسئلهٔ واقعی را به وسیلهٔ مجموعه‌ای از منابع مؤثر توزیع شده برای فاصله‌ای از اطراف جسم جایگزین کنیم.

فرض می‌کنیم که تعداد زیادی آنتن نزدیک هم داریم و شدت را در بعضی نقاط P می‌خواهیم به‌دست بیاوریم. این دقیقاً البته نه کاملاً شبیه چیزی است که ما انجام می‌دهیم، زیرا صفحهٔ نمایش ما در بی‌نهایت



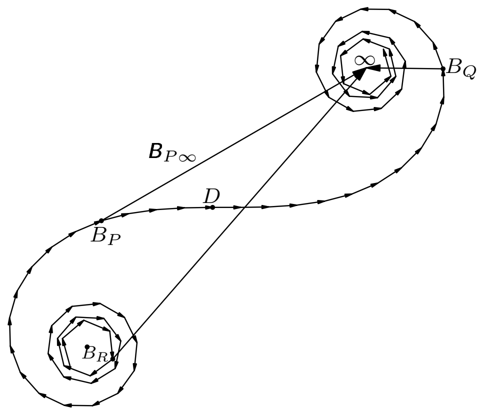
۷.۳۰. منبع نور موجود در فاصلهٔ دور سایه‌ای از جسم کدر بر روی پرده می‌اندازد.

نیست و ما شدت را در بی‌نهایت نمی‌خواهیم، بلکه در یک نقطه معین می‌خواهیم. برای محاسبه شدت در برخی نقاط ویژه، باید سهم همهٔ آنتن‌ها را با هم جمع کنیم. ابتدا یک آنتن در D دقیقاً مقابل P وجود دارد. اگر ما با زاویهٔ کم به سمت بالا حرکت کنیم و ارتفاع را h در نظر بگیریم، یک افزایش در تأخیر وجود دارد. (همچنین در دامنهٔ آن هم تغییری وجود دارد، که ناشی از تغییر ارتفاع است. اما در صورتی که خیلی دور باشیم، این اثر بسیار کوچک است و اهمیت آن از اختلاف فازها بسیار کمتر است.) حال اختلاف مسیر $EP - DP$ برابر با $h^۲/۲s$ است. بنابراین اختلاف فاز متناسب با مربع فاصله از D است، درحالی که در بحث قبلی s بی‌نهایت بوده و اختلاف فاز با h به صورت خطی بود. وقتی که فازها به‌طور خطی متناسب هستند، هر بردار با یک زاویهٔ ثابت به بردار قبلی اضافه می‌شود. چیزی که ما لازم داریم، منحنی‌ای است که با افزودن تعداد زیادی از بردارهای بی‌نهایت کوچک ساخته شده، به طوری که زاویهٔ ساخته شده توسط آن‌ها باید نه به صورت خطی بلکه با مربع طول منحنی افزایش یابد. ساخت چنین منحنی‌ای نیاز به ریاضیات پیشرفته دارد، اما همیشه با کشیدن فلش‌ها و اندازه‌گیری زوایا امکان‌پذیر است. در هر صورت ما این منحنی عجیب را که در شکل ۸.۳۰ نشان داده شده (که مارپیچ کورنو نامیده می‌شود) می‌سازیم. حال چگونه از این منحنی استفاده کنیم؟

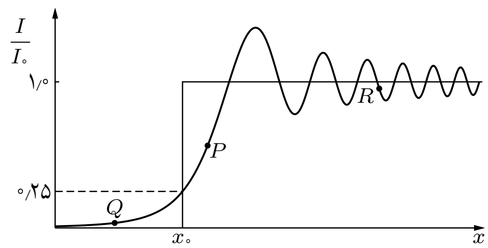
اگر شدت را می‌خواهیم، باید در نقطهٔ P سهم فازهای مختلف از نقطهٔ D به سمت مثبت بی‌نهایت و از D به سمت پایین تا B_p را جمع کنیم. بنابراین از B_p در شکل ۸.۳۰ شروع کرده و دیگر فلش‌ها را با زوایای افزایشی رسم می‌کنیم، در نتیجه مقدار مجموع در بالای نقطه B_p و در مسیر منحنی مارپیچ قرار می‌گیرد. اگر مجبور باشیم که کامل سازی را در برخی نقاط متوقف کنیم، بزرگی کل برابر با بزرگی بردار از B تا آن نقطه خواهد بود. در این مورد ویژه، به سمت بی‌نهایت حرکت می‌کنیم، بنابراین جواب کل بردار B_{p_∞} است. حال موقعیت روی منحنی که با نقطهٔ B_p روی شیء بیان می‌شود، وابسته به مکانی است که نقطهٔ P در آن واقع شده است، از آنجایی که نقطهٔ خمیدگی، نقطهٔ D همیشه مرتبط با موقعیت نقطهٔ P است، بنابراین بسته به محلی که نقطهٔ P بر روی B واقع شده است، نقطهٔ آغاز در موقعیت‌های مختلفی بر روی قسمت پایین سمت چپ منحنی خواهد افتاد و بردار برآیند B_{p_∞} بیشینه و کمینهٔ زیادی خواهد داشت (شکل ۹.۳۰).

از طرف دیگر اگر در نقطهٔ Q و در سمت دیگر P باشیم، فقط از یک انتهای منحنی مارپیچی استفاده می‌کنیم. به عبارت دیگر، حتماً از D شروع نمی‌کنیم، بلکه از B_Q شروع می‌کنیم. بنابراین، شدتی را به‌دست می‌آوریم که هر چه Q به سمت ما (سایه) حرکت می‌کند، به صورت پیوسته کاهش می‌یابد.

به منظور اینکه نشان دهیم آیا ما واقعاً آن را درک کرده‌ایم یا نه، می‌توانیم به آسانی شدتی را محاسبه کنیم که دقیقاً مقابل لبه قرار دارد. شدت در این نقطه، یک‌چهارم نور تابعه است. دلیل: دقیقاً ما نصف منحنی را داریم (بنابراین نقطهٔ پایانی B لبه‌دار در شکل ۸.۳۰ در D است) که اگر از ناحیهٔ روشن، دور نبودیم می‌توانستیم آن را داشته باشیم. اگر جایگاه ما R دور از نور باشد از یک انتهای منحنی به انتهای دیگر می‌رویم که شامل یک واحد برداری کامل است، اما اگر در لبهٔ سایه باشیم تنها نصف بزرگی یا ۱/۴ شدت



۸.۳۰. ترکیب دامنه برای بسیاری از نوسانگرها که تأخیر فازی به صورت مربع فاصله از نقطه D شکل قبلی تغییر می‌کند.



۹.۳۰. شدت، نزدیک لبه‌های سایه. لبهٔ هندسی سایه در x_0 قرار دارد.

را خواهیم داشت.

در این بخش ما شدت تولیدشده در جهات مختلف از منابع با مقادیر مختلف را محاسبه می‌کنیم به عنوان مثال آخر باید فرمولی را مطرح کنیم که در فصل بعد در تئوری شاخص شکست یا انحراف به آن نیاز داریم. این شدت‌های نسبی برای هدف ما کافی هستند، اما حال باید فرمول کاملی برای میدان در موقعیت زیر به‌دست بیاوریم.

۷.۳۰ میدان صفحهٔ بارهای نوسان‌کننده

فرض کنید که میدانی پر از منبع داریم که با هم نوسان می‌کنند و در عین حرکت در صفحه، همگی آن‌ها شدت و فاز یکسانی دارند. میدان در یک کمان معین اما بسیار بزرگ و دور از صفحه چقدر خواهد بود؟ (البته نمی‌توانیم خیلی دقیق باشیم چون فرمول‌های مناسب برای میدان‌های نزدیک منابع را نداریم.) اگر صفحهٔ بارها را $x-y$ بنامیم، می‌خواهیم میدان را درنقطهٔ P دور از محور z حساب کنیم (شکل ۱۰.۳۰). فرض می‌کنیم که η بار هر کدام با بار q به ازای واحد سطح صفحه وجود داشته باشد. همهٔ بارها یک

حرکت هماهنگ با جهت و بزرگی و فاز یکسان دارند. حرکت هر بار را با در نظر گرفتن میانگین موقعیت آن $x_\circ \cos\omega t$ در نظر می‌گیریم، با در نظر گرفتن این نکته، قسمت حقیقی نشانگر حرکت واقعی است.

حال میدان در نقطهٔ P ناشی از همهٔ بارها را با محاسبهٔ میزان هر بار q و افزودن سهم بارها محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که میدان تابشی متناسب با شتاب بار q برابر با $-\omega^2 x_\circ e^{i\omega t}$ است (برای همهٔ بارها یکسان است)، میدان الکتریکی در نقطهٔ P ناشی از بار در نقطهٔ Q متناسب با بار q است و باید یادآور شد که میدان در نقطهٔ P در لحظهٔ t با استفاده از شتاب بار در زمان اولیه $t' = t - r/c$ محاسبه می‌شود، که در آن r/c مدت زمانی است که طول می‌کشد تا موج‌ها مسافت r از Q تا P را طی کنند؛ بنابراین، میدان در نقطهٔ P متناسب است با:

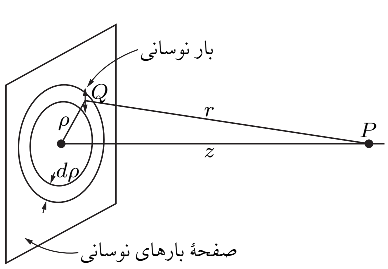
$$-\omega^2 x_\circ e^{i\omega(t-r/c)}. \qquad (۱۰.۳۰)$$

با استفاده از این مقدار برای شتاب، میدان الکتریکی در فواصل بزرگ از بار نظیر نقطهٔ P، تابشی مشاهده می‌شود که طبق فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix}\text{میدان الکتریکی ناشی از بار } Q\\ \text{در نقطهٔ } P\end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\epsilon_\circ c^2}\,\frac{\omega^2 x_\circ e^{i\omega(t-r/c)}}{r}\ (\text{تقریبی}). \qquad (۱۱.۳۰)$$

این فرمول کاملاً صحیح نیست، چون نباید از شتاب بار استفاده کنیم، بلکه باید از جزء عمود بر خط QP آن استفاده شود. باید فرض کنیم که هرچند نقطهٔ P در مقایسه با فاصلهٔ نقطهٔ Q از محورها بسیار دورتر است (فاصلهٔ ρ در شکل ۱۰.۳۰)، تغییراتی لازم است در نظر بگیریم که با آن می‌توانیم فاکتور کسینوس (که تقریباً در هر حالت برابر یک است) را حذف کنیم.

برای به‌دست آوردن میدان کلی در P، تأثیر همهٔ بارها را در صفحه اضافه می‌کنیم؛ البته باید یک بردار برآیند ایجاد کنیم، اما از آنجایی که جهت میدان برای همهٔ بارها تقریباً یکی است، برای حفظ تقریبی که قبلاً لحاظ کرده‌ایم، تنها بزرگی میدان‌ها را اضافه می‌کنیم. در تقریب ما میدان در نقطهٔ P تنها به فاصلهٔ r بستگی دارد و همهٔ بارها در r یکسان، میدان‌های برابری تولید می‌کنند، در نتیجه در ابتدا میدان بارها را در یک حلقه به ضخامت $d\rho$ و شعاع ρ جمع می‌کنیم؛ سپس با انتگرال‌گیری از ρ، میدان کلی را به‌دست خواهیم آورد.



۱۰.۳۰. میدان تابشی از یک صفحه از بارهای نوسانی.

تعداد بارها در حلقه برابر با مساحت حلقه $۲\pi\rho d\rho$ در تعداد بارها η به ازای واحد سطح است:

$$P \text{ میدان کلی در نقطهٔ } = \int \frac{q}{۴\pi\epsilon_۰ c^۲}\frac{\omega^۲ x_۰ e^{i\omega(t-r/c)}}{r}\cdot\eta\cdot ۲\pi\rho\,d\rho. \qquad (۱۲.۳۰)$$

انتگرال از $\rho = ۰$ تا $\rho = \infty$ را می‌توان ارزیابی کرد. در انتگرال‌گیری، متغیر t شامل $e^{i\omega t}$ برای زمان باید ثابت نگه داشته شود، بنابراین با حذف همهٔ فاکتورهای ثابت تنها مقادیر متغیر ρ و r هستند و انتگرال عبارت خواهد بود از:

$$\int_{\rho=۰}^{\rho=\infty}\frac{e^{-i\omega r/c}}{r}\rho\,d\rho. \qquad (۱۳.۳۰)$$

برای حل این انتگرال باید از رابطهٔ بین r و ρ استفاده کرد:

$$r^۲ = \rho^۲ + z^۲. \qquad (۱۴.۳۰)$$

با توجه به استقلال z از ρ در دیفرانسیل‌گیری از این رابطه خواهیم داشت:

$$۲r\,dr = ۲\rho\,d\rho,$$

بسیار خوش‌شانسیم، چون می‌توانیم $\rho d\rho$ را با rdr جایگزین کنیم و در این صورت r از مخرج حذف و انتگرال ساده‌تر خواهد شد.

$$\int_{r=z}^{r=\infty} e^{-i\omega r/c}\,dr. \qquad (۱۵.۳۰)$$

انتگرال‌گیری از یک توان طبیعی بسیار ساده‌تر است. ضریب r موجود در آن را تقسیم می‌کنیم و مقدار آن را حدودی به‌دست می‌آوریم. اما حدود برای r با حدود برای ρ یکی نیست. زمانی که $\rho = ۰$ باشد، $r = z$ خواهد بود. بنابراین حدود r از z تا بی‌نهایت است. برای انتگرال، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

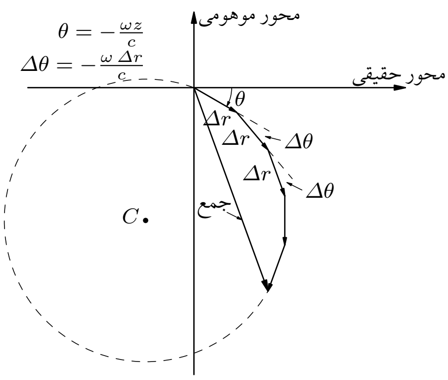
$$-\frac{c}{i\omega}[e^{-i\infty} - e^{-(i\omega/c)z}], \qquad (۱۶.۳۰)$$

که در این رابطه ∞ بجای $(\omega/c)\infty$ نوشته شده است، چون هر دو معنی بسیار بزرگ را می‌دهند.

کمیت $e^{-i\infty}$ بسیار مرموز است. قسمت حقیقی آن $\cos(-\infty)$ به لحاظ ریاضی کاملاً نامشخص است (هرچند می‌توانیم بپذیریم که جایی و هر جایی میان ۱+ و ۱− است.) اما به لحاظ موقعیت فیزیکی کاملاً معقول است و می‌تواند صفر در نظر گرفته شود. برای به‌دست آوردن آن می‌توانیم به انتگرال اصلی (۱۵.۳۰) برگردیم.

رابطهٔ (۱۵.۳۰) را می‌توان به عنوان جمع تعداد زیادی عدد مختلط با هر بزرگی برای Δr و زاویهٔ $\theta = -\omega r/c$ در صفحهٔ مختلط موهومی دانست. این مجموع را می‌توانیم با روش گرافیکی نیز به‌دست

بیاوریم. در شکل ۱۱.۳۰ پنج تکه از جمع کشیده شده است. هر بخش از منحنی دارای طول Δr است که در زاویهٔ $\Delta\theta = -\omega\Delta r/c$ نسبت به تکهٔ قبل از خودش قرار دارد. مجموع، برای پنج تکهٔ اول به وسیلهٔ پیکانی از نقطهٔ شروع تا انتهای تکهٔ پنجم بیان شده است. اگر به جمع تکه‌ها ادامه بدهیم، ردی از چندضلعی به جای خواهیم گذاشت، تا اینکه به نقطهٔ شروع برگردیم و دوباره حول نقطه‌ای دیگر شروع کنیم. با اضافه کردن تکه‌های بیش‌تر فقط دورتر و دورتر می‌رویم و نزدیک به دایره‌ای با شعاع c/ω باقی خواهیم ماند. حال به خوبی دیده می‌شود که چرا انتگرال جواب مشخصی نمی‌دهد.



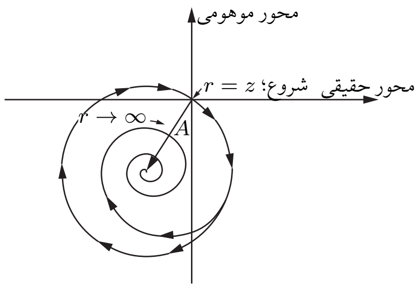
۱۱.۳۰. جواب هندسی $\int_z^\infty e^{-i\omega r/c}\,dr$.

حال بایستی به فیزیک شرایط (موقعیت) بیان شده، برگردیم. در موقعیت واقعی، صفحهٔ بارها نمی‌تواند بی‌نهایت باشد و بایستی گاهی اوقات متوقف شود. اگر به طور ناگهانی متوقف شود و دقیقاً شکل دایره باشد، انتگرال همان مقدار را بر روی دایره در شکل ۱۱.۳۰ خواهد داشت. اگر تعداد بارها در صفحه در برخی فواصل نسبت به مرکز به تدریج کاهش یابد (یا اینکه به طور ناگهانی متوقف شود، ولی در ریخت و شکل منظم به طوری که به ازای ρهای بزرگ‌تر حلقهٔ داخلی به عرض $d\rho$ خیلی بیش‌تر از تصحیحات نباشد)، ضریب η در انتگرال تا نزدیکی صفر کاهش خواهد یافت. با توجه به اینکه در حال جمع‌بندی تکه‌های کوچک‌تر هستیم و در همان زاویه می‌چرخیم، گراف مربوط به انتگرال به شکل منحنی مارپیچ خواهد شد. مارپیچی که مطابق شکل ۱۲.۳۰ به مرکز دایرهٔ اصلی ختم می‌شود. انتگرال صحیح به لحاظ فیزیکی عدد موهومی A است و در شکل به‌وسیلهٔ فاصله از نقطهٔ شروع تا مرکز دایره نمایش داده شده است که برابر است با:

$$\frac{c}{i\omega}\,e^{-i\omega z/c}, \tag{۱۷.۳۰}$$

این نتیجه را از معادله (۱۶.۳۰) با تنظیم $e^{-i\infty} = 0$ نیز می‌توان به‌دست آورد.

(دلیل دیگری برای تصحیحات انتگرال که به ازای مقادیر بزرگی از r به تدریج کم می‌شود، وجود دارد و آن همان فاکتوری است که برای تصویر شتاب روی صفحه عمود بر خط PQ حذف کرده‌ایم.)



۱۲.۳۰. جواب هندسی $\int_z^\infty \eta e^{-i\omega r/c}\, dr$.

ما علاقه‌مند به موقعیت (شرایط) فیزیکی هستیم، بنابراین $e^{-i\infty}$ را صفر در نظر خواهیم گرفت. برای میدان‌ها به فرمول اصلی (۱۲.۳۰) برمی‌گردیم و تمام فاکتورهایی که در انتگرال‌گیری حذف می‌شوند را دوباره قرار می‌دهیم و نتیجه زیر را داریم:

$$\text{میدان کلی در نقطهٔ } P = -\frac{\eta q}{2\epsilon_\circ c} i\omega x_\circ e^{i\omega(t-z/c)} \qquad (۱۸.۳۰)$$

(با یادآوری اینکه $1/i = -i$).

جالب است توجه کنیم که $i\omega x_\circ e^{i\omega t}$ دقیقاً برابر با سرعت بار است، به طوری که می‌توان معادله برای میدان را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\text{میدان کلی در نقطهٔ } P = -\frac{\eta q}{2\epsilon_\circ c} [\text{سرعت بارهای الکتریکی}]_{t\,-\,z/c\ \text{at}}, \qquad (۱۹.۳۰)$$

اندکی عجیب است زیرا شتاب منفی، فقط به خاطر فاصلهٔ z، یعنی کوتاه‌ترین فاصله از P تا صفحهٔ بار است. اما این روش خوشبختانه فرمول نسبتاً ساده‌ای را به‌دست می‌دهد. (هرچند محاسبات برای مسافت‌های دور از صفحهٔ نوسان بارها معتبر است، اما می‌توان نتیجه گرفت که فرمول (۱۸.۳۰) یا (۱۹.۳۰) برای هر فاصله‌ای از z حتی به ازای $z < \lambda$ نیز درست است.)