

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 27

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۲۷

مترجم: مسعود هاشمی

ویراستار: شقایق مرادی راد

حروفچین: نگین باقری نقره‌ای

نسخه‌ی ۱۰۰ پاییز ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید.

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۲۷

اپتیک هندسی^۱

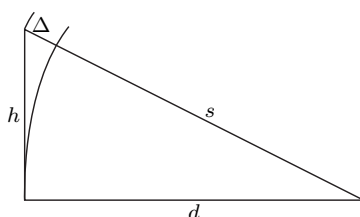
۱.۲۷ مقدمه

در این فصل برخی از کاربردهای بنیادی ایده‌های فصل قبلی را برای تعدادی از دستگاه‌های عملی، با استفاده از تقریبی که اپتیک هندسی نامیده می‌شود مورد بحث قرار می‌دهیم. این مفیدترین تقریب در طراحی عملی بسیاری از ابزارها و دستگاه‌های اپتیکی است. اپتیک هندسی بسیار ساده یا بسیار پیچیده است. منظور این است که یا می‌توانیم آن را تنها به صورت سطحی مطالعه کنیم؛ به طوری که با استفاده از قواعدی آنقدر ساده که به ندرت نیاز می‌شود در اینجا اصلاً با آنها سروکاری داشته باشیم، چون عملاً در سطح دبیرستان هستند، بتوانیم ابزاری را به صورت تقریبی طراحی کنیم، یا اگر بخواهیم درباره‌ی خطاهای کوچک در عدسی‌ها و جزئیات مشابه بدانیم، موضوع پیچیده‌تر از آن می‌شود که در اینجا بحث شود! اگر کسی مشکل واقعی و دقیقی در طراحی عدسی داشته باشد، از جمله تجزیه و تحلیل ابیراهی‌ها^۲، به او توصیه می‌شود در مورد این موضوع مطالعه کند و یا به سادگی، با استفاده از قانون شکست نور^۳ از یک طرف به طرف دیگر، پرتوها را از میان سطوح مختلف ردیابی نماید (که همان چیزی است که کتاب اپتیک می‌گوید که چگونه باید انجام شود)؛ و جایی که پرتوها بیرون می‌آیند را پیدا کند و ببیند آیا یک تصویر رضایت‌بخش را تشکیل می‌دهند یا خیر. قبلاً مردم می‌گفتند که این خیلی خسته‌کننده است، اما امروزه، با رایانه‌ها راه مناسبی برای انجام این کار هست. می‌توان مسئله را طرح کرد و محاسبات را برای یک پرتو پس از دیگری به سادگی انجام داد. بنابراین موضوع درواقع کاملاً ساده است، و مستلزم اصول جدیدی نیست. علاوه بر این، معلوم می‌شود که قوانین اپتیک مقدماتی یا پیشرفته به ندرت مشخصه‌ای از زمینه‌های دیگر اند، بنابراین، غیر از یک استثناء مهم، هیچ دلیل خاصی برای پیگیری خیلی زیاد موضوع وجود ندارد.

¹Geometrical Optics

³refraction

²aberration



شکل ۱.۲۷

انتزاعی‌ترین و پیشرفته‌ترین نظریه‌ی اپتیک هندسی توسط هامیلتون^۴ ارائه شده است، و معلوم شده که کاربردهای بسیار مهمی در مکانیک دارد. درواقع این نظریه در مکانیک خیلی مهم‌تر از اپتیک است، و بنابراین ما نظریه‌ی هامیلتون را به موضوع درسی مکانیک تحلیلی پیشرفته که در سال تحصیلی آخر یا تحصیلات تکمیلی مطالعه می‌شود موکول می‌کنیم. بنابراین، با توجه به اینکه اپتیک هندسی، بجز به‌خاطر خودش، سهم علمی کمی دارد، اکنون ما به بحث در مورد خواص ابتدایی دستگاه‌های اپتیکی ساده بر اساس اصول مطرح شده در فصل قبلی ادامه می‌دهیم.

در ادامه، ما باید یک فرمول هندسی به شرح زیر داشته باشیم: اگر مثلث قائم الزویه‌ای با ارتفاع h و قاعده‌ی d داشته باشیم، قطر s (که ما برای پیدا کردن تفاضل بین دو مسیر متفاوت به آن نیاز داریم) بزرگتر از قاعده می‌باشد (شکل ۱.۲۷). چقدر بزرگتر؟ تفاضل $\Delta = s - d$ را می‌توان به چندین روش یافت. یک راه این است: ملاحظه می‌کنیم $s^2 - d^2 = h^2$ ، یا $(s - d)(s + d) = h^2$. اما $s - d = \Delta$ ، و $s + d \approx 2s$. بنابراین:

$$\Delta \approx h^2 / 2s \quad (1.27)$$

این تمام هندسه‌ای است که برای بحث تشکیل تصاویر سطوح خمیده نیاز داریم!

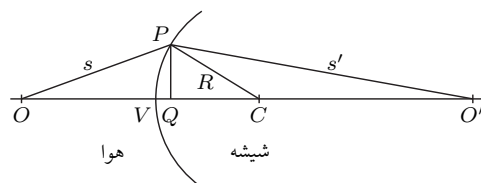
۲.۲۷ فاصله‌ی کانونی^۵ یک سطح کروی

اولین و ساده‌ترین وضعیت برای بحث، یک سطح شکننده‌ی منفرد است، که دو محیط^۶ با شاخص شکست‌های^۷ متفاوت را از هم جدا می‌کند (شکل ۲.۲۷). ما حالت شاخص شکست‌های دلخواه را به دانشجو واگذار می‌کنیم، زیرا همیشه مهم‌ترین چیز ایده است، نه وضعیت خاص، و مسئله به اندازه‌ی کافی آسان هست تا در هر مورد بررسی شود. بنابراین فرض می‌کنیم که تندی در سمت چپ ۱، و در سمت راست $1/n$ است، که n شاخص شکست است. نور در شیشه با ضریب n ، بسیار کندتر از هوا حرکت می‌کند.

حالا فرض کنید نقطه‌ای در O ، در فاصله‌ی s از سطح جلویی شیشه، و نقطه‌ای دیگر O' را در فاصله‌ی s' داخل شیشه داریم. می‌خواهیم سطح خمیده را در وضعیتی قرار دهیم که هر پرتو از O که در هر نقطه‌ی P به سطح برخورد می‌کند، طوری خم شود که به طرف نقطه‌ی O' پیش برود. برای این منظور، باید سطح

⁴Hamilton
⁵focal length

⁶medium
⁷indices of refraction



شکل ۲.۲۷. کانونی کردن توسط یک سطح شکنده

را به گونه‌ای شکل دهیم که زمانی که برای رفتن نور از O به P طول می‌کشد، یعنی مسافت OP تقسیم بر تندی نور (تندی در اینجا برابر یک است)، به علاوه‌ی $n.O'P$ ، که زمانی است که طول می‌کشد از P به O' برود، برابر باشد با یک ثابت ناوابسته به نقطه‌ی P . این شرط معادله‌ای برای تعیین سطح برای ما فراهم می‌کند. نتیجه می‌گیریم که سطح منحنی درجه چهارم بسیار پیچیده است و دانشجو می‌تواند خود را با تلاش برای محاسبه‌ی آن با هندسه‌ی تحلیلی سرگرم کند. ساده‌تر است یک مورد خاص را که مربوط به $s \rightarrow \infty$ است امتحان کنید، زیرا منحنی درجه دوم و مشخص تر می‌شود. مقایسه‌ی این منحنی با منحنی سهموی^۸ که برای یک آینه‌ی کانونی‌کننده^۹ هنگامی که نور از بی‌نهایت می‌آید به دست آورده‌ایم جالب است.

بنابراین سطح مناسب نمی‌تواند به آسانی ساخته شود، برای کانونی کردن نور از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر نیاز به یک سطح نسبتاً پیچیده است. در عمل معلوم می‌شود ما معمولاً سعی نمی‌کنیم چنین سطوح پیچیده‌ای را درست کنیم، بلکه به جای آن حد وسط را در نظر می‌گیریم. به جای تلاش برای اینکه همه‌ی پرتوها به کانون برسند، آنها را طوری مرتب می‌کنیم که فقط پرتوهای نسبتاً نزدیک به محور OO' به کانون برسند. متأسفانه به علت اینکه سطح ایده‌آل پیچیده است، پرتوهای دورتر اگر بخواهند به کانون برسند ممکن است منحرف شوند، که ما به جای آن از سطح کروی با انحنای محوری مناسب آن استفاده می‌کنیم. ساختن یک کره نسبت به سطوح دیگر بسیار ساده‌تر است. پس با این فرض که تنها پرتوهای نزدیک محور کاملاً کانونی می‌شوند، پی بردن به اینکه برای پرتوهایی که به سطح کروی برخورد می‌کنند چه اتفاقی می‌افتد برای ما مفید است. پرتوهایی که نزدیک محور هستند، گاهی پرتوهای پیرامحوری^{۱۰} نامیده می‌شوند، و آنچه ما در حال تجزیه و تحلیل آن هستیم شرایط برای کانونی کردن پرتوهای پیرامحوری است. بعداً در مورد خطاهایی که با در نظر گرفتن این واقعیت که همه‌ی پرتوها همیشه نزدیک به محور نیستند مطرح می‌شوند بحث می‌کنیم.

بنابراین با فرض اینکه P به محور نزدیک است، عمود PQ را رسم می‌کنیم به طوری که ارتفاع PQ برابر h باشد. برای یک لحظه تصور می‌کنیم که سطح، به صورت صفحه‌ای^{۱۱} است که از P عبور می‌کند. در این حالت، زمان مورد نیاز برای رفتن از O به P از زمان رفتن از O به Q بیشتر است، و همچنین زمان مورد نیاز برای رفتن از P به O' از زمان رفتن از Q به O' بیشتر است. اما به همین دلیل شیشه باید منحنی

^۸parabolic curve^۹focusing mirror^{۱۰}paraxial rays^{۱۱}plane

باشد، زیرا کل زمان اضافی باید با تأخیر در گذر از V به Q جبران شود! اکنون زمان اضافی در طول مسیر OP برابر $h^2/2s$ است، و زمان اضافی در مسیر دیگر $nh^2/2s'$ است. این زمان اضافی^{۱۲}، که باید با تأخیر در رفتن در امتداد VQ مطابقت داشته باشد، با زمانی که در خلأ خواهد بود متفاوت است، زیرا محیطی وجود دارد. به عبارت دیگر، زمان رفتن از V به Q به اندازه‌ای نیست که گویی کاملاً در هوا است، بلکه با ضریب n کندتر می‌شود، به طوری که تأخیر اضافی در این فاصله VQ $(n-1)VQ$ است. حال اندازه‌ی VQ چقدر است؟ اگر نقطه‌ی C مرکز کره و شعاع آن R باشد، با همان فرمول می‌بینیم که فاصله‌ی VQ برابر با $h^2/2R$ است. بنابراین ما دریافتیم قانونی که فاصله‌های s و s' را به هم مرتبط می‌کند، و شعاع انحنای R سطح مورد نیاز ما را می‌دهد، این است:

$$(h^2/2s) + (nh^2/2s') = (n-1)h^2/2R \quad (2.27)$$

یا

$$(1/s) + (n/s') = (n-1)/R \quad (3.27)$$

اگر موقعیت O و موقعیت دیگر O' را داشته باشیم، و بخواهیم نور را از O به O' کانونی کنیم، می‌توانیم شعاع مورد نیاز انحنای R سطح را با این فرمول محاسبه کنیم.

اکنون جالب است که همان عدسی با همان انحنای R ، فاصله‌های دیگر را هم کانونی خواهد کرد، یعنی برای هر جفت فاصله طوری که مجموع دو عدد معکوس، یک ضرب در n ، یک مقدار ثابت بشود. بنابراین یک عدسی مفروض (مادام که خودمان را محدود به پرتوهای پیرامحوری نماییم)، نه تنها O را به O' کانونی می‌کند، بلکه تعداد نامحدودی جفت نقاط دیگر را کانونی می‌کند، مادام که برای این جفت نقاط رابطه‌ی $1/s + n/s' = \text{constant}$ برقرار شود.

به طور خاص، یک مورد جالب زمانی رخ می‌دهد که در آن $s \rightarrow \infty$ بشود. از فرمول گفته شده می‌توانیم ببینیم که وقتی یکی از s ها افزایش می‌یابد، دیگری کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، اگر نقطه‌ی O دور می‌شود، نقطه‌ی O' نزدیک می‌شود، و بالعکس. همین که نقطه‌ی O به سمت بی‌نهایت می‌رود، نقطه O' به حرکت در می‌آید تا زمانی که به فاصله‌ی مشخصی در محیط برسد، که فاصله‌ی کانونی f' نامیده می‌شود. اگر پرتوها موازی وارد شوند، محور را در فاصله‌ی f' قطع می‌کنند. این را به روش دیگری نیز می‌توانیم تصور کنیم. (قاعده‌ی دوجانبگی^{۱۳} را به یاد بیاورید: اگر نور از O به O' برود، از O' نیز به O می‌رود). بنابراین، اگر چشمه‌ی نوری داخل شیشه داشته باشیم، ممکن است بخواهیم بدانیم کانون کجاست. به‌ویژه اگر نور درون شیشه در بی‌نهایت باشد (همان مسئله)، بیرون از شیشه کجا کانونی می‌شود؟ این فاصله f نامیده می‌شود. البته می‌توانیم این را به روش دیگری بیان کنیم. اگر چشمه‌ی نوری در f داشته باشیم که

¹²excess time¹³reciprocity rule

نور از سطح عبور کند، به صورت باریکه‌ای^{۱۴} موازی بیرون می‌آید. می‌توانیم به راحتی f و f' را پیدا کنیم:

$$n/f' = (n-1)/R \quad \text{یا} \quad f' = Rn/(n-1) \quad (۴.۲۷)$$

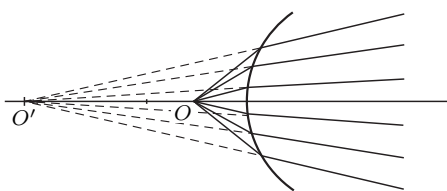
$$1/f = (n-1)/R \quad \text{یا} \quad f = R/(n-1) \quad (۵.۲۷)$$

چیز جالبی را مشاهده می‌کنیم: اگر هر فاصله‌ی کانونی را بر شاخص شکست متناظرش تقسیم کنیم، به نتیجه‌ی یکسانی می‌رسیم! در واقع این قضیه‌ای عمومی است، که بدون توجه به میزان پیچیدگی آن برای هر دستگاهی از عدسی‌ها درست است، پس به خاطر داشتن آن جالب است. ما در اینجا به اثبات عمومی بودن آن نپرداختیم و صرفاً برای یک سطح منفرجه آن اشاره کردیم. اما به طور کلی درست است که دو فاصله‌ی کانونی یک دستگاه به این طریق با هم مرتبط هستند. گاهی اوقات معادله‌ی (۳.۲۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$1/s + n/s' = 1/f \quad (۶.۲۷)$$

این معادله از معادله‌ی (۳.۲۷) مفیدتر است، زیرا ما می‌توانیم f را راحت‌تر از اندازه‌گیری انحناء و شاخص شکست عدسی‌ها اندازه‌گیری کنیم: اگر ما علاقه‌ای به طراحی و یا چگونگی مراحل طراحی عدسی نداریم، و فقط از آن استفاده می‌کنیم، کمیت جالب f است نه n و R .

اکنون اگر s کمتر از f شود وضعیت جالبی رخ می‌دهد. چه اتفاقی می‌افتد؟ اگر $f < s$ ، آنگاه $1/s > 1/f$ ، و بنابراین s' منفی است؛ معادله‌ی ما می‌گوید نور فقط با مقدار منفی s' کانونی خواهد شد، حال به هر معنی‌ای که باشد. البته معنی بسیار جالب و مشخصی دارد. به عبارت دیگر، حتی زمانی که اعداد منفی هستند، هم فرمولی مفید است. معنی آن در شکل ۳.۲۷ نشان داده شده است. اگر ما پرتوهایی را که از O واگرا می‌شوند رسم کنیم، درست است که آن‌ها در سطح خمیده می‌شوند، و به کانون نمی‌آیند، زیرا O آنقدر به سطح نزدیک است که پرتوها «ناموازی» هستند. با این حال، آن‌ها طوری واگرا می‌شوند که گویا از نقطه‌ی O' از شیشه بیرون آمده‌اند. این یک تصویر ظاهری^{۱۵} است، که گاهی تصویر مجازی^{۱۶} نامیده می‌شود. تصویر O' در شکل (۲.۲۷) تصویر واقعی نامیده می‌شود.



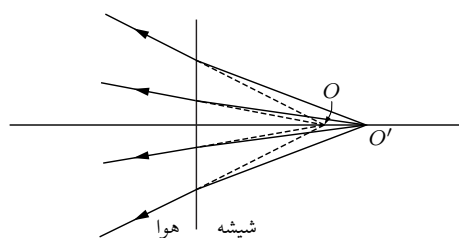
شکل ۳.۲۷. تصویر مجازی

اگر نور واقعاً به یک نقطه برسد، تصویر واقعی است. اما اگر به نظر می‌رسد نور از یک نقطه، یک

¹⁴beam

¹⁶virtual image

¹⁵apparent image



شکل ۴.۲۷. سطح تخت، نور را از O' به O مجدداً تصویر می‌کند.

نقطه‌ی موهوم^{۱۷} متفاوت از نقطه‌ی اصلی، می‌آید تصویر مجازی است. بنابراین وقتی s' منفی می‌شود، به این معنی است که O' در طرف دیگر سطح است، و همه چیز درست است. اکنون یک مورد جالب را که در آن R بی‌نهایت است در نظر بگیرید، پس داریم $(1/s) + (n/s') = 0$. به عبارت دیگر، $s' = -ns$ ، که بدین معنی است که اگر از یک محیط چگال به محیط رقیق^{۱۸} نگاه کنیم، نقطه‌ای را در محیط رقیق می‌بینیم، که با عامل n عمیق‌تر به نظر می‌رسد. به همین ترتیب، ما می‌توانیم همان معادله را به صورت وارونه استفاده کنیم، به طوری که اگر ما در درون یک سطح تخت به شی‌ءی که در فاصله‌ی معینی در داخل محیط چگال است نگاه کنیم، به نظر می‌رسد که گویا نور از نقطه‌ای جلوتر می‌آید (شکل ۴.۲۷). وقتی از بالا به ته یک استخر شنا نگاه می‌کنیم، به آن عمقی که واقعاً هست دیده نمی‌شود، بلکه با ضریب $3/4$ ، که وارون شاخص شکست آب است دیده می‌شود. البته می‌توانیم ادامه داده درباره‌ی آینه‌ی کروی بحث کنیم. اما اگر کسی ایده‌های دربرگیرنده‌ی این مبحث را ارزیابی کند، باید بتواند آن را برای خودش حل کند. بنابراین ما این را به دانشجو واگذار می‌کنیم تا فرمول آینه‌ی کروی را حل نماید، اما یادآوری می‌کنیم که خوب است قراردادهای معینی در مورد فاصله‌ها اتخاذ نماییم شامل:

۱. اگر نقطه‌ی O سمت چپ سطح باشد، فاصله‌ی s جسم مثبت است.

۲. اگر نقطه‌ی O' سمت راست سطح باشد، فاصله‌ی s' تصویر مثبت است.

۳. اگر مرکز سمت راست سطح باشد، شعاع انحنای سطح مثبت است.

به عنوان مثال، در شکل ۲.۲۷، s ، s' و R همه مثبت هستند؛ در شکل (۳.۲۷)، s و R مثبت هستند، اما s' منفی است. اگر ما یک سطح کاو^{۱۹} داشته باشیم، اگر صرفاً R را کمیتی منفی قرار دهیم، فرمول (۳.۲۷) هنوز هم نتیجه‌ی درست می‌دهد. برای حل فرمول متناظر برای آینه، با استفاده از قراردادهای بالا، خواهید یافت که اگر در فرمول (۳.۲۷) همه جا $n = -1$ قرار دهیم (مثل اینکه مواد پشت آینه دارای شاخص -1 باشد)، فرمول درست برای آینه به دست می‌آید!

¹⁷fictitious point

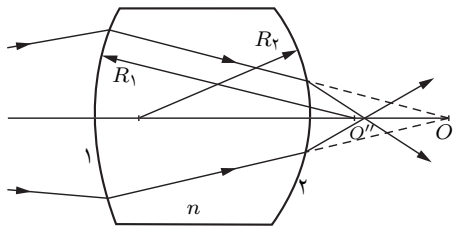
¹⁹concave

¹⁸rare

اگرچه به‌دست آوردن فرمول (۳.۲۷)، با استفاده از کمترین زمان، ساده و زیبا است، اما با یادآوری اینکه زاویه‌ها آنقدر کوچک هستند که سینوس زاویه می‌تواند با خود زاویه جایگزین شود، می‌توان با استفاده از قانون اسنل^{۲۰} همان فرمول را به‌دست آورد.

۳.۲۷ فاصله‌ی کانونی عدسی

اکنون وضعیت دیگری را که بسیار عملی است در نظر می‌گیریم. بیشتر عدسی‌هایی که ما استفاده می‌کنیم دارای نه فقط یکی بلکه دو سطح اند. این موضوع چطور مسائل را تحت تاثیر قرار می‌دهد؟ فرض کنید که دو سطح با انحناهای مختلف داریم، که فضای بین آنها با شیشه پر شده است (شکل ۵.۲۷). می‌خواهیم مسئله‌ی کانونی شدن از نقطه‌ی O به نقطه‌ی جایگزین O' را بررسی کنیم. چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ پاسخ این است: ابتدا سطح دوم را فراموش کرده، از فرمول (۳.۲۷) برای سطح اول استفاده کنید. این به ما می‌گوید که نور، که از O واگرا شده، به نظر می‌رسد از یک نقطه‌ی دیگر مثلاً O' ، بسته به علامت، همگرا یا واگرا می‌شود. اکنون مسئله‌ی جدیدی را در نظر می‌گیریم. بین شیشه و هوا سطحی متفاوت داریم، که در آن پرتوها به سمت نقطه‌ی خاص O' همگرا می‌شوند. این پرتوها واقعاً کجا همگرا می‌شوند؟ دوباره از همان فرمول استفاده می‌کنیم و درمی‌یابیم که در O'' همگرا می‌شوند. بنابراین، در صورت لزوم می‌توانیم صرفاً با استفاده از همان فرمول به صورت متوالی از ۷۵ سطح عبور کنیم و از یکی به بعدی برویم!

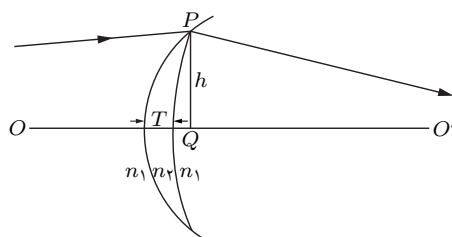


شکل ۵.۲۷. تشکیل تصویر توسط عدسی دوسطحی

تعدادی از فرمول‌های نسبتاً مشکل و خاص وجود دارند که باعث صرفه‌جویی قابل توجهی در انرژی برای دفعات کمی در زندگی که ممکن است مجبور به دنبال کردن نور از میان پنج سطح شویم می‌شوند. اما ساده‌تر است که فقط وقتی به این مسئله برخورد کردیم؛ عمل دنبال کردن نور از میان پنج سطح انجام شود، نه اینکه تعداد زیادی فرمول را حفظ کنیم، چرا که شاید مجبور نباشیم اصلاً به دنبال نور در سطوح مختلف بگردیم!

در هر صورت، اصل این است که وقتی از یک سطح عبور می‌کنیم، موقعیتی جدید و یک نقطه‌ی کانونی جدید را پیدا کنیم، و سپس آن نقطه را به عنوان نقطه‌ی شروع برای سطح بعدی در نظر بگیریم و به همین ترتیب ادامه دهیم. برای اینکه واقعاً چنین کاری انجام شود، چون در سطح دوم بجای از ۱ به n از n به ۱

²⁰Snell's law



شکل ۶.۲۷. عدسی نازک با دو شعاع مثبت

می‌رویم، و چون در بسیاری از دستگاه‌ها بیش از یک نوع شیشه وجود دارد، به طوری که شاخص‌های n_1 ، n_2 و ... موجود هستند، ما واقعاً نیاز به تعمیم فرمول (۳.۲۷) برای حالتی که به جای تنها شاخص n ، دو شاخص متفاوت n_1 و n_2 وجود دارد داریم. پس اثبات اینکه فرم کلی (۳.۲۷)، فرمول زیر است مشکل نیست:

$$(n_1/s) + (n_2/s') = (n_2 - n_1)/R \quad (۷.۲۷)$$

مورد خاص بسیار ساده‌ای هست که در آن دو سطح خیلی نزدیک هستند، آنقدر نزدیک که ممکن است از خطاهای کوچک ناشی از ضخامت چشم‌پوشی کنیم. اگر عدسی را همان‌طور که در شکل ۶.۲۷ نشان داده شده رسم کنیم، ممکن است این سوال را بپرسیم: عدسی چگونه باید ساخته شود تا نور را از O به O' کانونی کند؟ فرض کنید نور دقیقاً تا نقطه‌ی P در لبه‌ی عدسی می‌آید. پس اگر برای لحظه‌ای وجود ضخامت T شیشه‌ی با شاخص n_2 را نادیده بگیریم، زمان اضافی برای رفتن از O به O' برابر $(n_1 h^2 / 2s) + (n_1 h^2 / 2s')$ است. حال برای اینکه زمان مسیر مستقیم را با زمان مسیر OPO' برابر کنیم؛ باید از یک قطعه شیشه که ضخامت T آن در مرکز طوری است که تأخیر عنوان‌شده برای عبور از این ضخامت، برای جبران زمان اضافی بالا کافی است استفاده کنیم.

بنابراین ضخامت عدسی در مرکز باید توسط رابطه‌ی زیر داده شود:

$$(n_1 h^2 / 2s) + (n_1 h^2 / 2s') = (n_2 - n_1)T \quad (۸.۲۷)$$

می‌توانیم T را برحسب شعاع‌های R_1 و R_2 دو سطح نیز بیان کنیم. با توجه به قرارداد (۳)، برای $R_1 > R_2$ (عدسی کوژ) پیدا می‌کنیم:

$$T = (h^2 / 2R_1) - (h^2 / 2R_2) \quad (۹.۲۷)$$

بنابراین، سرانجام خواهیم داشت:

$$(n_1/s) + (n_1/s') = (n_2 - n_1)(1/R_1 - 1/R_2) \quad (۱۰.۲۷)$$

حالا دوباره توجه می‌کنیم که اگر یکی از نقاط در بی‌نهایت باشد، دیگری در نقطه‌ای خواهد بود که فاصله‌ی کانونی f می‌نامیم. فاصله‌ی کانونی f توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$1/f = (n - 1)(1/R_1 - 1/R_2) \quad (11.27)$$

که در اینجا $n = n_1/n_2$.

حال، اگر حالت معکوس را در نظر بگیریم، که s به بی‌نهایت می‌رود، می‌بینیم که s' در فاصله‌ی کانونی f' است. در این زمان فاصله‌های کانونی برابرند (این مورد خاص دیگری از قاعده‌ی کلی است که نسبت دو فاصله‌ی کانونی برابر با نسبت شاخص‌های شکست در دو محیطی است که در آن‌ها پرتوها کانونی می‌شوند. در این دستگاه اپتیکی خاص، شاخص‌های اولیه و نهایی یکسان هستند، بنابراین دو فاصله‌ی کانونی برابرند). با فراموش کردن فرمول واقعی فاصله‌ی کانونی برای یک لحظه، اگر ما عدسی‌ای خریدیم که با شعاع‌های انحنای مشخص و شاخص مشخص طراحی شده است، می‌توانیم فاصله‌ی کانونی را، مثلاً با مشاهده‌ی اینکه نقطه‌ای در بی‌نهایت کجا کانونی می‌شود، اندازه‌گیری کنیم. هنگامی که فاصله‌ی کانونی را داشته‌باشیم، بهتر می‌شود که معادله‌ی مان را مستقیماً برحسب فاصله‌ی کانونی بنویسیم. بنابراین فرمول این است:

$$(1/s) + (1/s') = 1/f \quad (12.27)$$

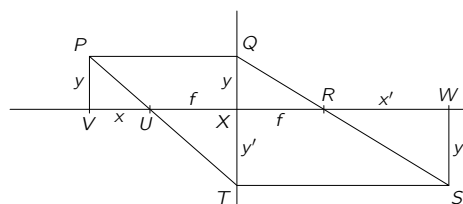
اکنون اجازه دهید ببینیم که فرمول چگونه کار می‌کند و در شرایط مختلف به چه چیزی دلالت دارد. اولاً، این فرمول نشان می‌دهد که اگر s یا s' بی‌نهایت باشند، کمیت دیگر برابر با f است. این بدین معنی است که نور موازی در فاصله‌ی f کانونی می‌شود، و این در واقع f را تعریف می‌کند. چیز جالب دیگری که می‌گوید این است که هر دو نقطه در یک جهت حرکت می‌کنند. اگر یکی به سمت راست حرکت کند، دیگری نیز همین کار را انجام می‌دهد. چیز دیگری که می‌گوید این است که s و s' برابرند، اگر هر دو برابر با $2f$ باشند. به عبارت دیگر، اگر بخواهیم وضعیت متقارن باشد، متوجه می‌شویم که هر دوی آن‌ها در فاصله‌ی $2f$ کانونی می‌شوند.

۴.۲۷ بزرگنمایی^{۲۱}

ما تاکنون عمل کانونی شدن را فقط برای نقاط روی محور بحث کرده‌ایم. اکنون اجازه دهید راجع به تصویرسازی از اشیائی که دقیقاً روی محور نیستند، اما مقدار دوری آن‌ها بسیار ناچیز است، بحث کنیم، به طوری که بتوانیم ویژگی‌های بزرگنمایی را درک کنیم. وقتی یک عدسی را طوری تنظیم کنیم که نور از یک رشته‌ی^{۲۲} کوچک به «نقطه‌ای» بر روی یک پرده کانونی شود، متوجه می‌شویم که روی پرده «تصویر» همان رشته را به دست می‌آوریم، مگر اینکه اندازه‌ای بزرگتر یا کوچکتر از رشته‌ی واقعی دارد.

²¹Magnification

²²filament



شکل ۷.۲۷. هندسه‌ی تصویرسازی توسط عدسی نازک.

این باید به این معنی باشد که نور از تمام نقاط رشته به کانون می‌رسد. برای درک کمی بهتر، بگذارید دستگاه عدسی نازک را که در شکل ۷.۲۷ به‌طور طرح‌واره^{۲۳} نشان داده شده است، تحلیل کنیم. ما واقعیت‌های زیر را می‌دانیم:

۱. هر پرتویی که به‌طور موازی از یک طرف می‌آید، در طرف دیگر به سمت نقطه‌ی خاص معینی در فاصله‌ی f از عدسی که کانون نامیده می‌شود، حرکت می‌کند.
۲. هر پرتویی که از کانون واقع در یک طرف وارد عدسی می‌شود، موازی با محور طرف دیگر خارج می‌شود.

تمام چیزی که برای اثبات هندسی فرمول (۱۲.۲۷) نیاز داریم به‌شرح زیر است: فرض کنید جسمی در فاصله‌ی x از کانون داریم؛ و ارتفاع جسم y می‌باشد. می‌دانیم که یکی از پرتوها، یعنی PQ ، طوری خم می‌شود که از کانون R در طرف دیگر عبور کند. حال اگر عدسی نقطه‌ی P را تحت هر شرایطی کانونی کند، در صورتی که بفهمیم پرتو دیگر کجا می‌رود، می‌توانیم بفهمیم که کانون کجاست، زیرا کانون جدید جایی خواهد بود که در آن دو پرتو دوباره هم‌دیگر را قطع کنند. برای پیدا کردن جهت دقیق یک پرتو دیگر، فقط باید از خلاقیت‌مان استفاده کنیم. اما به یاد داریم که پرتو موازی از کانون می‌گذرد و برعکس: پرتویی که از کانون می‌گذرد، موازی خارج می‌شود! بنابراین ما پرتو PT را از طریق U رسم می‌کنیم. (درست است که پرتوهای واقعی که کانونی می‌شوند ممکن است بسیار محدودتر از دو پرتویی که ما نمایش داده‌ایم باشند، اما نمایش آن‌ها مشکل‌تر است، بنابراین باور داریم که می‌توانیم این پرتو را ایجاد کنیم).

چون این پرتو به صورت موازی بیرون می‌آید، TS را به موازات XW رسم می‌کنیم. تقاطع S نقطه‌ای است که ما نیاز داریم. این نقطه مکان صحیح و ارتفاع صحیح را تعیین می‌کند. اجازه دهید ارتفاع و فاصله از کانون را نام‌گذاری کنیم. اکنون می‌توانیم فرمولی برای عدسی استخراج کنیم. با استفاده از مثلث‌های متشابه PVU و TXU ، درمی‌یابیم که:

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{x} \quad (۱۳.۲۷)$$

²³schematically

بطور مشابه، از مثلث‌های SWR و QXR خواهیم داشت:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y}{f} \quad (۱۴.۲۷)$$

با حل دو معادله‌ی بالا برای y'/y ، درمی‌یابیم که:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f} = \frac{f}{x} \quad (۱۵.۲۷)$$

معادله‌ی (۱۵.۲۷) فرمول معروف عدسی است؛ که در آن همه‌ی چیزهایی که باید در مورد عدسی‌ها بدانیم وجود دارد: این معادله بزرگنمایی y'/y را برحسب فاصله‌ها و فاصله‌های کانونی بیان می‌کند. همچنین دو فاصله‌ی x و x' را با f مرتبط می‌کند:

$$xx' = f^2 \quad (۱۶.۲۷)$$

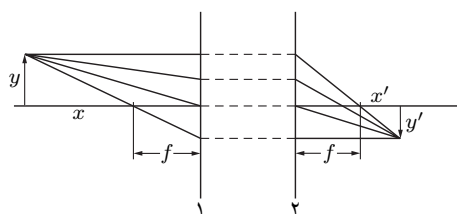
که برای کار، فرم بسیار مرتب‌تری از معادله‌ی (۱۲.۲۷) است. اثبات اینکه اگر $s = x + f$ و $s' = x' + f$ ، معادله‌ی (۱۲.۲۷) با معادله‌ی (۱۶.۲۷) یکسان می‌باشد را به دانشجو واگذار می‌کنیم.

۵.۲۷ عدسی‌های مرکب^{۲۴}

نتیجه‌ی کلی را به‌طور خلاصه برای وقتی که تعدادی عدسی داریم شرح می‌دهیم، بدون اینکه واقعاً آن را به‌دست آوریم. اگر دستگاهی از چندین عدسی داشته باشیم، چطور می‌توانیم آن را تجزیه و تحلیل کنیم؟ آسان است. با یک جسم شروع می‌کنیم و با استفاده از فرمول (۱۶.۲۷) یا (۱۲.۲۷) یا هر فرمول معادل دیگر، یا با رسم نمودارها محاسبه می‌کنیم که تصویر آن برای اولین عدسی کجاست. بنابراین یک تصویر پیدا می‌کنیم. سپس با این تصویر به عنوان چشمه برای عدسی‌های بعدی رفتار می‌کنیم، و از عدسی دوم با فاصله‌ی کانونی‌اش هر چه باشد، استفاده می‌کنیم تا مجدداً تصویری به‌دست آوریم. ما به سادگی از طریق توالی عدسی‌ها موضوع را دنبال می‌کنیم. این تمام چیزی است که در این مورد وجود دارد و در اصل هیچ چیز جدیدی نیست، بنابراین ما آن را بررسی نمی‌کنیم. با این حال، نتیجه‌ی خالص بسیار جالبی از آثار هر توالی‌ای از عدسی‌ها بر روی نوری که در یک محیط شروع و در همان محیط، مثلاً هوا، به پایان می‌رسد، وجود دارد. هر ابزار اپتیکی، تلسکوپ یا میکروسکوپ با هر تعداد عدسی و آینه، دارای ویژگی زیر است: دو صفحه، که صفحات اصلی^{۲۵} دستگاه نامیده می‌شوند، وجود دارند (این صفحه‌ها اغلب نسبتاً نزدیک به اولین سطح عدسی اول و آخرین سطح عدسی آخر هستند)، که دارای خواص زیراند: (۱) اگر نور از طرف اول به‌صورت موازی وارد دستگاه شود، در کانون معینی خارج می‌شود، در فاصله‌ای از صفحه‌ی اصلی دوم

²⁴Compound lenses

²⁵principal planes



شکل ۸.۲۷. نمایش صفحات اصلی یک دستگاه اپتیکی.

که برابر با فاصله‌ی کانونی می‌باشد، درست مانند اینکه دستگاه عدسی نازکی باشد که در این صفحه قرار داشته باشد. (۲) اگر نور موازی از جهت دیگری بیاید، در همان فاصله‌ی f از اولین صفحه‌ی اصلی، به کانون وارد می‌شود، بازهم گویی عدسی نازکی در آنجا قرار دارد (شکل ۸.۲۷ را ببینید).

البته اگر ما فاصله‌های x و x' ، و y و y' را مانند قبل اندازه‌گیری کنیم، فرمول (۱۶.۲۷) که برای عدسی نازک نوشته‌ایم کاملاً عمومی است، به شرط اینکه فاصله‌ی کانونی را از صفحه‌های اصلی اندازه‌گیری کنیم و نه از مرکز عدسی. برای عدسی نازک صفحه‌های اصلی منطبق‌اند. این درست مانند این است که ما می‌توانیم عدسی نازکی گرفته، از وسط برش داده و جدا کنیم، و متوجه نشویم که از هم جدا شده است. هر پرتویی که می‌آید فوراً از همان نقطه‌ای که به صفحه‌ی اول وارد شده، در طرف دیگر صفحه‌ی دوم بیرون می‌آید! صفحه‌های اصلی و فاصله‌ی کانونی ممکن است با آزمایش یا محاسبه پیدا شوند و سپس مجموعه‌ای کامل از خواص دستگاه اپتیکی شرح داده شود. بسیار جالب است که وقتی کارمان با چنین دستگاه اپتیکی بزرگ و پیچیده‌ای تمام شود، نتیجه پیچیده نیست.

۶.۲۷ ابیراهی‌ها^{۲۶}

پیش از اینکه در مورد شگفت‌انگیز بودن عدسی‌ها خیلی هیجان‌زده شویم، باید سریع‌تر اضافه نماییم که محدودیت‌های جدی‌ای وجود دارند، به دلیل این واقعیت که ما اصولاً خودمان را به پرتوهای پیرامحوری، پرتوهای نزدیک محور، محدود کرده‌ایم. عدسی واقعی با داشتن اندازه‌ای محدود، به طور کلی، ابیراهی‌هایی را نشان می‌دهد. مثلاً، پرتویی که روی محور قرار دارد، که البته از کانون عبور می‌کند؛ پرتوای بسیار نزدیک به محور است که به کانون می‌رسد. اما همانطور که دورتر می‌شویم، پرتو از کانون منحرف می‌شود، شاید به‌خاطر کوتاه شدن، و پرتویی که به نزدیکی لبه‌ی بالایی برخورد می‌کند فرود می‌آید و فاصله‌ی مشخصاً زیادی با کانون خواهد داشت. بنابراین، به جای گرفتن تصویری نقطه‌ای، یک لکه^{۲۷} دریافت می‌کنیم. این اثر ابیراهی کروی نامیده می‌شود، زیرا ویژگی‌ای از سطوح کروی است که به‌جای شکل درست استفاده می‌کنیم. این اثر می‌تواند برای هر فاصله‌ی ویژه‌ی شیء، با تغییر شکل سطح عدسی، و یا شاید با استفاده

²⁶Aberrations

²⁷smear

از چندین عدسی که طوری مرتب شده‌اند که ابیراهی‌های عدسی‌های منفرد تمایل به حذف یکدیگر داشته باشند، اصلاح شود.

عدسی‌ها مشکل دیگری هم دارند: نور رنگ‌های متفاوت دارای تندی‌های متفاوت، یا شاخص‌های شکست متفاوت، در شیشه است و در نتیجه فاصله‌ی کانونی عدسی معین برای رنگ‌های مختلف متفاوت است. بنابراین اگر ما از یک نقطه‌ی سفید تصویرسازی کنیم، تصویر رنگی خواهد بود، زیرا زمانی که ما برای رنگ قرمز کانونی می‌کنیم، آبی خارج از کانون است و برعکس. این ویژگی ابیراهی رنگی^{۲۸} نامیده می‌شود. هنوز مشکلات دیگری هم وجود دارند. اگر شیء خارج از محور و به اندازه‌ی کافی دور از آن باشد، کانون واقعاً دیگر کامل نیست. ساده‌ترین راه برای اثبات درستی این است که یک عدسی را کانونی کرده و سپس آن را کج کنیم تا پرتوها با زاویه‌ای بزرگ از محور وارد شوند. تصویری که تشکیل می‌شود، معمولاً کاملاً ناهنجار^{۲۹} است و ممکن است جایی نباشد که آن را به خوبی کانونی کند. بنابراین چندین نوع خطا در عدسی‌ها وجود دارند که طراح اپتیکی تلاش می‌کند با استفاده از عدسی‌های متعدد که خطاهای یکدیگر را جبران می‌کنند آن‌ها را اصلاح کند.

برای حذف ابیراهی‌ها چقدر باید دقیق باشیم؟ آیا ساخت یک دستگاه مطلقاً کامل اپتیکی امکان دارد؟ فرض کنید یک دستگاه اپتیکی ساخته‌ایم که قرار است نور را دقیقاً به یک نقطه ببرد. حال، با استدلال دیدگاه کمترین زمان، آیا می‌توانیم شرطی را در مورد اینکه دستگاه چقدر باید کامل باشد پیدا کنیم؟ این دستگاه نوعی روزنه‌ی ورودی برای نور خواهد داشت. اگر دورترین پرتو از محور را که می‌تواند به کانون برسد در نظر بگیریم (البته اگر دستگاه کامل باشد)، زمان برای همه‌ی پرتوها دقیقاً برابر است. اما هیچ چیز کامل نیست، بنابراین سوال این است که برای این پرتو زمان چقدر می‌تواند اشتباه باشد و ارزش تصحیح بیشتر نداشته باشد؟ این بستگی دارد که می‌خواهیم تصویر چقدر کامل باشد. اما فرض کنید می‌خواهیم تصویر را تا آنجایی که ممکن باشد کامل کنیم. پس، تصور ما این است که باید ترتیبی دهیم که هر پرتو تا آنجا که ممکن است تقریباً زمان یکسانی داشته باشد. اما به نظر می‌رسد که این درست نیست، از یک حدی به بعد ما سعی داریم کاری کنیم که زیادی خوب است، چون تئوری اپتیک هندسی کار نمی‌کند.

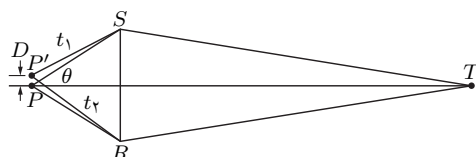
به یاد داشته باشید که بر خلاف اصل پایستگی انرژی یا اصل پایستگی تکانه، اصل کمترین زمان یک فرمول‌بندی دقیق نیست. اصل کمترین زمان فقط یک تقریب است و جالب است بدانیم که چقدر خطا می‌تواند مجاز باشد که بازهم هیچ تفاوت آشکاری ایجاد نشود. پاسخ این است که اگر ما ترتیبی داده‌ایم که بین پرتو بیشینه‌ی ۱؛ یعنی بدترین پرتو که دورترین فاصله را دارد، و پرتو مرکزی، اختلاف زمان کمتر از حدود دوره‌ای ۲ است که متناظر با یک نوسان نور است، بنابراین بهبود بیشتر آن فایده‌ای ندارد. نور چیزی نوسانی ۳ است با بسامدی مشخص که به طول‌موج بستگی دارد، و اگر ما ترتیبی داده باشیم که اختلاف زمان برای پرتوهای مختلف (از حدود) یک دوره کمتر باشد بهبود بیشتر آن فایده‌ای ندارد.

²⁸chromatic aberration²⁹crude

۷.۲۷ توان تفکیک^{۳۰}

سوال جالب دیگر، یک سوال بسیار مهم فنی درباره‌ی همه‌ی ابزارهای اپتیکی، این است که توان تفکیک آن‌ها چقدر است. اگر ما یک میکروسکوپ بسازیم، می‌خواهیم اشیایی را که به آن‌ها نگاه می‌کنیم، ببینیم. این بدین معنی است که به عنوان مثال، اگر ما به یک باکتری با نقطه‌ای در هر طرف آن نگاه کنیم، وقتی آن‌ها را بزرگ می‌کنیم می‌خواهیم ببینیم دو نقطه وجود دارد. ممکن است کسی فکر کند تمام آنچه ما باید انجام دهیم این است که بزرگنمایی کافی به دست آوریم. ما همیشه می‌توانیم عدسی دیگری اضافه نماییم، و همیشه می‌توانیم مکرراً بزرگنمایی کنیم و با هوشمندی طراحان، تمام ابیراهی‌های کروی و رنگی را می‌توان حذف کرد، و هیچ دلیلی وجود ندارد که نتوانیم بزرگنمایی تصویر را ادامه دهیم. بنابراین محدودیت‌های میکروسکوپ این نیست که ساخت عدسی‌ای که بیشتر از ۲۰۰۰ بار بزرگنمایی کند غیرممکن است. ما می‌توانیم دستگاهی از عدسی‌هایی که ۱۰,۰۰۰ بار بزرگنمایی می‌کنند بسازیم، اما به دلیل محدودیت‌های اپتیک هندسی، به دلیل این واقعیت که کمترین زمان، دقیق نیست؛ باز هم نمی‌توانیم دو نقطه که بیش از حد به هم نزدیک‌اند را جدا از هم مشاهده کنیم.

کشف قاعده‌ای که تعیین می‌کند دو نقطه تا چه حد باید فاصله داشته باشند به طوری که در تصویر به صورت نقاط جداگانه‌ای به نظر برسند، می‌تواند به روشی بسیار زیبا وابسته به زمان مورد نیاز برای پرتوهای مختلف بیان شود. فرض کنید فعلاً از ابیراهی‌ها صرف نظر کنیم، و تصور کنید که برای نقطه‌ی خاص P (شکل ۹.۲۷) تمام پرتوها از شیء تا تصویر T دقیقاً زمان یکسانی صرف می‌کنند. (این درست نیست، زیرا این دستگاه، دستگاه کاملی نیست، اما این موضوع دیگری است). حالا نقطه‌ی نزدیک دیگر را در نظر بگیرید و بپرسید که آیا تصویر آن از T متمایز خواهد بود یا نه؟ به عبارت دیگر، آیا ما می‌توانیم تفاوت بین آن‌ها را تشخیص دهیم؟ البته طبق اپتیک هندسی، باید دو تصویر نقطه‌ای وجود داشته باشد، اما ممکن است آنچه ما می‌بینیم نسبتاً به شکل لکه باشد و قادر نباشیم تشخیص دهیم که دو نقطه وجود دارد.



شکل ۹.۲۷. توان تفکیک دستگاه اپتیکی

شرط اینکه نقطه‌ی دوم در مکانی با وضوح متفاوت با نقطه‌ی اول کانونی شود، این است که زمان رفتن پرتوهای انتهایی $P'ST$ و $P'RT$ در دو طرف دهانه‌ی بزرگ عدسی‌ها از یک سر به سر دیگر، نباید (با زمان رفتن پرتوها) از دو نقطه‌ی احتمالی شیء به یک نقطه‌ی مفروض تصویر برابر باشند. چرا؟ زیرا، اگر زمان‌ها برابر باشند، هر دو در نقطه‌ای یکسان کانونی می‌شوند. بنابراین زمان‌ها برابر نخواهند بود. اما آن‌ها چقدر باید تفاوت داشته باشند تا بتوانیم بگوییم که هر دو به یک کانون مشترک نمی‌رسند، به طوری که ما

³⁰Resolving power

می‌توانیم دو نقطه‌ی تصویر را تشخیص دهیم؟ قاعده‌ی کلی برای تفکیک هر ابزار اپتیکی این است: دو چشمه‌ی نقطه‌ای مختلف تنها در صورتی می‌توانند تفکیک شوند که یک چشمه در چنان نقطه‌ای کانونی شود که زمان‌ها برای پرتوهای بیشینه از چشمه‌ی دیگر برای رسیدن به آن نقطه، در مقایسه با نقطه‌ی واقعی تصویر خودش، بیش از یک دوره تفاوت داشته باشند. لازم است که تفاوت در زمان بین پرتوهای بالا و پایین تا کانون اشتباه از مقدار مشخصی، یعنی تقریباً از دوره‌ی نوسان نور، بیشتر باشد:

$$t_2 - t_1 > 1/\nu \quad (۱۷.۲۷)$$

در اینجا ν بسامد نور است (تعداد نوسان‌ها در ثانیه، و همچنین تندی تقسیم بر طول موج). اگر فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی D و زاویه‌ی دهانه‌ی عدسی ν نامیده شود، سپس می‌توان نشان داد که (۱۷.۲۷) دقیقاً معادل با این عبارت است که D باید از $\lambda / \sin \theta$ بیشتر باشد که n شاخص شکست در P و λ طول موج است. بنابراین کوچکترین چیزهایی که ما می‌توانیم بینیم تقریباً طول موج‌های نور اند. فرمول متناظری برای تلسکوپ وجود دارد، که کوچکترین تفاوت در زاویه‌ی^{۳۱} بین دو ستاره که دقیقاً می‌تواند تشخیص داده شود را به ما می‌گوید.

Summary Lecture 28. Geom. Optics

For rays near axis, spherical surfaces form images as follows:

One surface: $\frac{1}{s} + \frac{n}{s'} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}$

Start at $s=f$ (focus) makes rays $\parallel$ to axis in image space ($s'=\infty$)
 Start $\parallel$ to axis ($s=\infty$) rays converge at other focus $s'=f'$: $\frac{f'}{n} = f$.

Thin lens: $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$ or $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

General system: Find image in 1st surface (or lens) + use as object for next surface, etc

$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

^{۳۱} زاویه حدوداً λ/D است، که D قطر عدسی است. آیا می‌توانید دریابید چرا؟