

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 20

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۲۰

مترجم: محمد فتحی

ویراستاران: زهره رشوادی

حروفچین: سجاد پورمنوچهری

نسخه‌ی ۱۰۰ تابستان ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۲۰

دوران در فضا

۱.۲۰ گشتاورها در سه بعد

در این فصل به شرح یکی از قابل توجه‌ترین و سرگرم‌کننده‌ترین نتایج مکانیک، یعنی رفتار یک چرخ دوّار، می‌پردازیم. برای انجام این کار ابتدا باید فرمولاسیون ریاضیاتی حرکت دورانی، اصل تکانه زاویه‌ای، گشتاور و ... را به فضای سه بُعدی تعمیم دهیم. ما این معادلات و نتایج حاصل از آن را در حالت کلی بررسی نخواهیم کرد، زیرا انجام این کار سال‌ها به طول می‌انجامد و از طرفی، ما باید خیلی سریع به مسائل دیگر هم بپردازیم. در یک دوره مقدماتی می‌توان تنها قوانین پایه را ارائه داد و در موارد خاصی که علاقه داریم نیز از آن‌ها استفاده کنیم.

ابتدا به این مسئله می‌پردازیم که اگر دوران در سه بُعد داشته باشیم، اعم از اینکه یک جسم صلب باشد و یا هر سیستم دیگری، نتایجی که برای دو بعد استخراج کرده ایم همچنان صادق هستند. به این معنی که $x F_y - y F_x$ همچنان گشتاوری در صفحه xy است یا به عبارت دیگر گشتاور حول محور z است. همچنین دیده می‌شود که این گشتاور همچنان برابر میزان تغییر $x P_y - y P_x$ است، که اگر به استخراج معادله (۵.۱۸) از قوانین نیوتن رجوع کنیم، متوجه می‌شویم که اجباری بر فرض صفحه بودن حرکت نداشتیم. زمانی که از $x P_y - y P_x$ مشتق‌گیری کنیم نتیجه به صورت $x F_y - y F_x$ حاصل می‌شود در نتیجه این تئوری همچنان صادق است. کمیت $x P_y - y P_x$ را تکانه زاویه‌ای در صفحه xy و یا تکانه حول محور z می‌نامیم. می‌نامیم. با درستی این عبارت، می‌توانیم از هر جفت محور دیگری استفاده کرده و یک معادله دیگر به دست بیاوریم. به طور مثال می‌توان از صفحه yz استفاده کرد، که با توجه به تقارن، واضح است که اگر y را به جای x و z را به جای y جایگذاری کنیم به عبارت $y F_z - z F_y$ برای گشتاور دست خواهیم یافت و $y P_z - z P_y$ نیز تکانه زاویه‌ای مربوط به صفحه yz خواهد بود. البته می‌توان صفحه دیگری را، که همان صفحه

xz است، نیز در نظر بگیریم که برای آن به عبارت $d/dx(zP_x - xP_z)$ دست می‌یابیم.

این اینکه این سه معادله را می‌توان برای حرکت یک ذره استخراج کرد تقریباً واضح است. همچنین اگر مواردی مانند $xP_y - yP_x$ را برای تعداد زیادی ذره با هم جمع می‌کردیم و نام آن را تکانه زاویه‌ای کلی می‌گذاشتیم، سه نوع معادله برای سه صفحه xy ، yz و zx داشتیم و اگر این کار را با نیروها نیز انجام می‌دادیم، می‌توانستیم در مورد گشتاور در صفحات xy ، yz و zx صحبت کنیم. بدین ترتیب می‌توانستیم قوانینی به این صورت داشته باشیم که گشتاورهای خارجی مربوط به هر صفحه دلخواهی برابر میزان تغییرات تکانه زاویه‌ای مربوط به همان صفحه خواهد بود. این تنها تعمیم چیزی است که ما در دو بعد نوشته‌ایم.

ولی حالا شاید کسی بگوید «البته، ولی صفحات بیش‌تری وجود دارد؛ با این حال، آیا نمی‌توانیم چند صفحه دیگر با زوایای دیگر در نظر بگیریم و گشتاور را با استفاده از نیروها بر روی آن‌ها محاسبه کنیم؟» از آنجا که می‌بایست معادلات دیگری برای هر صفحه می‌نوشتیم، معادلات بسیاری می‌داشتیم! به طرز جالبی این طور به نظر می‌رسد که اگر می‌خواستیم ترکیب $xIF_{yI} - yIF_{xI}$ را برای یک صفحه دیگر محاسبه کنیم، که به معنی اندازه‌گیری F_{yI} xI و غیره است، نتیجه را برحسب ترکیب سه عبارت برای صفحات xy ، yz و zx و می‌توان نوشت. هیچ چیز جدیدی وجود ندارد. به زبان دیگر اگر گشتاور در صفحات xy ، yz و zx را بدانیم سپس گشتاور را در هر صفحه دیگر و در نتیجه آن تکانه زاویه‌ای را می‌توان برحسب ترکیب این سه نوشت. شش درصد از این و نود و دو درصد از آن و بقیه‌اش به همین ترتیبی است که در ادامه توضیح داده می‌شود.

در نظر بگیرید که در محورهای xyz ، جو تمام گشتاورها و تکانه‌های زاویه‌ای خود را محاسبه کرده است. اما اما ماوی دارای محورهای xI ، yI ، zI در جهات دیگر است. برای راحتی تنها فرض می‌کنیم که محورهای x و y چرخیده‌اند. محورهای xI و yI که متعلق به ماوی‌اند، جدید هستند. اما محور zI همان محور z است. می‌توان گفت او دارای صفحات جدید yz و zx است. از این رو او دارای گشتاور و تکانه‌های زاویه‌ای جدید است که می‌خواهد محاسبه کند. به عنوان مثال گشتاور او در صفحه $xIyI$ برابر خواهد بود با $xIF_{yI} - yIF_{xI}$ و مانند آن. کاری که حالا باید انجام دهیم این است که ارتباط بین گشتاورهای جدید و قدیم را پیدا کنیم. در نتیجه ما خواهیم توانست یک ارتباط بین یک دسته از محورها با دسته دیگری از محورها ایجاد کنیم. شاید کسی بگوید که این شبیه همان کاری است که با بردارها انجام دادیم «و واقعا این دقیقاً همان کاری است که می‌خواهیم انجام دهیم». سپس ممکن است بگوید: «آیا گشتاور همان بردار نیست؟» شبیه به یک بردار به نظر می‌رسد اما ما بدون انجام آنالیز این را نمی‌دانیم. در نتیجه در ادامه به انجام آنالیز می‌پردازیم. ما تمام مراحل را با جزئیات توضیح نخواهیم داد زیرا ما تنها می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه این کار را



انجام می‌دهیم. معادلات جو به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= xF_y - yF_x, \\ \tau_{yz} &= yF_z - zF_y, \\ \tau_{zx} &= zF_x - xF_z.\end{aligned}\tag{۱.۲۰}$$

در اینجا ما مخالف اشاره به این هستیم که اگر مختصات درست کنترل نشود در مواردی مانند این شاید کسی علامت غلطی را برای برخی مقادیر به دست آورد. چرا ننویسیم $\tau_{zy} = zF_y - yF_z$ ؟ مشکل از این حقیقت نشأت می‌گیرد که یک دستگاه مختصات می‌تواند راست‌گرد و یا چپ‌گرد باشد. با انتخاب علامت دلخواه به طور برای مثال τ_{zy} ، عبارت صحیح برای دو کمیت دیگر با جابه‌جایی حروف xyz در هر یک از ترتیب‌های زیر پیدا می‌شود. حال ماوی گشتاورها را در دستگاه خود محاسبه می‌کند:

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= x'F_{y'} - y'F_{x'}, \\ \tau_{y'z'} &= y'F_{z'} - z'F_{y'}, \\ \tau_{z'x'} &= z'F_{x'} - x'F_{z'}.\end{aligned}\tag{۲.۲۰}$$

حال در نظر می‌گیریم که یک مختصه با زاویه ثابت θ دوران داده شده است. به طوری که محورهای z و z' یکسان هستند. (این زاویه θ ربطی به دوران اجسام و یا اتفاقات داخل دستگاه مختصات ندارد. این تنها ارتباط بین محورهای استفاده شده توسط یک شخص با محورهای استفاده شده توسط شخص دیگر است که از قرار معلوم ثابت است.) در نتیجه مختصات دو دستگاه به صورت زیر به هم مرتبط هستند:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= y \cos \theta - x \sin \theta, \\ z' &= z.\end{aligned}\tag{۳.۲۰}$$

به همین ترتیب، چون نیرو یک بردار است همانند روشی با آن رفتار می‌شود که x ، y و z به دستگاه جدید انتقال می‌یابند، زیرا یک کمیت زمانی بردار است که اگر و فقط اگر مؤلفه‌های مختلف آن

همانند x, y و z منتقل شوند.

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \\ F_{y'} &= F_y \cos \theta - F_x \sin \theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \quad (۴.۲۰)$$

حال خواهیم فهمید که چگونه گشتاور، تنها با جایگذاری عبارت‌های برابر با مقادیر x', y' و z' در معادله (۳.۲۰) و جایگذاری مقادیر برابر با $F_{x'}, F_{y'}, F_{z'}$ در معادله (۴.۲۰) و انتقال این مقادیر جایگزین به معادله (۲.۲۰)، منتقل می‌شود. در نتیجه یک رشته طولانی از عبارات برای $\tau_{x'y'}$ خواهیم داشت و (در نگاه اول غافلگیرانه) به نظر می‌رسد که به $x F_y - y F_x$ ختم می‌شود، و می‌توان دید که این همان گشتاور در صفحه xy است.

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= (x \cos \theta + y \sin \theta)(F_y \cos \theta - F_x \sin \theta) \\ &\quad - (y \cos \theta - x \sin \theta)(F_x \cos \theta + F_y \sin \theta) \\ &= x F_y (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - y F_x (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &\quad + x F_x (-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + y F_y (\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta) \\ &= x F_y - y F_x = \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (۵.۲۰)$$

نتایج به دست آمده واضح هستند، زیرا اگر ما محورها را در صفحه دوران دهیم، چرخش حول محور z تفاوتی در آن صفحه نسبت به حالت اول صفحه ایجاد نمی‌کند زیرا همان صفحه xy است. چیزی که جالب‌تر خواهد بود عبارت مربوط به $\tau_{y'z'}$ است، زیرا یک صفحه جدید است. حال ما دقیقاً همین کار را با صفحه $y'z'$ انجام می‌دهیم که نتایج آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tau_{y'z'} &= (y \cos \theta - x \sin \theta) F_z \\ &\quad - z (F_y \cos \theta - F_x \sin \theta) \\ &= (y F_z - z F_y) \cos \theta + (z F_x - x F_z) \sin \theta \\ &= \tau_{yz} \cos \theta + \tau_{zx} \sin \theta. \end{aligned} \quad (۶.۲۰)$$

نهایتاً این کار را برای z/x' نیز انجام می دهیم:

$$\begin{aligned}\tau_{z'x'} &= z(F_x \cos \theta + F_y \sin \theta) \\ &\quad - (x \cos \theta + y \sin \theta)F_z \\ &= (zF_x - xF_z) \cos \theta - (yF_z - zF_y) \sin \theta \\ &= \tau_{zx} \cos \theta - \tau_{yz} \sin \theta.\end{aligned}\quad (۷.۲۰)$$

اما به دنبال رابطه‌ای برای به دست آوردن گشتاورها در محورهای جدید برحسب گشتاورهای محورهای قدیمی بودیم و حالا این رابطه را داریم. چطور می‌توانیم این رابطه را به خاطر بسپاریم؟ اگر با دقت به معادلات (۵.۲۰)، (۶.۲۰) و (۷.۲۰) نگاه کنیم؛ می‌توان دید که رابطه نزدیکی بین این معادلات و معادلات مربوط به x ، y و z وجود دارد. اگر به طریقی می‌توانستیم τ_{xy} را مؤلفه z چیزی مانند τ در نظر بگیریم، آنگاه متوجه می‌شدیم که معادله (۵.۲۰) یک تبدیل برداری است زیرا همانگونه که باید، مؤلفه z بدون تغییر باقی می‌ماند. همینطور اگر ما مؤلفه x بردار جدید ابداع شده τ را با صفحه yz و مؤلفه y را با صفحه zx ربط دهیم، این روابط تبدیل، به صورت زیر درخواهند آمد:

$$\begin{aligned}\tau_{z'} &= \tau_z, \\ \tau_{x'} &= \tau_x \cos \theta + \tau_y \sin \theta, \\ \tau_{y'} &= \tau_y \cos \theta - \tau_x \sin \theta,\end{aligned}\quad (۸.۲۰)$$

که همان رابطه بردارهاست! به همین دلیل ما اثبات کرده‌ایم که می‌توانیم ترکیب $xF_y - yF_x$ را با چیزی که ما معمولاً مؤلفه z بردار مصنوعی ابداع شده، می‌نامیم، در نظر گرفت. اگرچه گشتاور یک پیچش بر روی یک صفحه است و هیچ مشخصه پیشینی دال بر بردار بودن را ندارد، ولی به لحاظ ریاضی دقیقاً شبیه به یک بردار رفتار می‌کند. این بردار در زاویه قائمه نسبت به صفحه پیچش قرار دارد و طول آن متناسب با قدرت پیچش است. سه مؤلفه یک چنین کمیتی مانند یک بردار واقعی تبدیل خواهند شد.

در نتیجه ما گشتاورها را با بردارها نمایش می‌دهیم، به هر صفحه‌ای که گشتاور قرار است بر آن عمل کند، ما یک خط قائمه به وسیله یک قانون ربط می‌دهیم. اما جمله «در زاویه قائمه» علامت را نامشخص رها می‌کند. برای به دست آوردن علامت صحیح ما باید یک قانون به دست آوریم که به ما بگوید اگر گشتاور در حالت مشخصی در روی صفحه xy بود، سپس محوری را که ما می‌خواهیم به آن ربط دهیم در جهت «بالای» z قرار دارد. این بدین معنی است که کسی باید «راست» و «چپ» را برای ما تعیین کند. با توجه به اینکه سیستم مختصات x, y, z در یک دستگاه راست گرد است، سپس رابطه به صورتی که در ادامه می‌آید، خواهد بود. اگر ما پیچش را همانند حالتی که در حال پیچاندن یک پیچ راست گرد هستیم، در نظر بگیریم (پیچ راست گرد، پیچی است که با چرخاندن در

جهت عقربه‌های ساعت بسته می‌شود)، سپس جهت برداری که ما به آن ربط خواهیم داد در جهتی است که پیچ، پیش‌روی خواهد کرد.

چرا گشتاور یک بردار است؟ این یک معجزه و خوش‌شانسی است که ما می‌توانیم یک محور تنها را به یک صفحه ربط دهیم و از این رو است که می‌توانیم یک بردار را با گشتاور ربط دهیم. این یک خصوصیت خاص فضای سه بعدی است. در دو بعد، گشتاور یک اسکالر معمولی است و نیازی به ارتباط دادن یک جهت با آن نیست. در سه بعد، گشتاور یک بردار است. اگر ما چهار بعد داشتیم به دردرس بزرگی دچار می‌شدیم، زیرا (به طور مثال اگر زمان را به عنوان بعد چهارم در نظر بگیریم) نه تنها صفحاتی مانند xy ، yz و zx ؛ بلکه صفحاتی مانند tx ، ty و tz نیز می‌داشتیم. شش صفحه وجود داشت و نشان دادن شش کمیت به عنوان یک بردار در چهار بعد امکان‌پذیر نیست.

ما مدت طولانی را در سه بعد سپری خواهیم کرد، پس خوب است توجه کنیم که عملیات ریاضی که در بالا آمده وابسته به این حقیقت که x موقعیت (مکانی) و $\mathbf{F}$ نیرو است، نبوده است؛ عملیات ریاضی تنها وابسته به قانون انتقال برای بردارها بوده است. به همین دلیل اگر به جای x ما مؤلفه x یک بردار دیگر را در نظر بگیریم تغییری ایجاد نخواهد کرد. به زبان دیگر اگر می‌خواستیم $a_x b_y - a_y b_x$ را محاسبه کنیم، که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردار هستند، و آن را مؤلفه z کمیت جدید $\mathbf{c}$ بنامیم، نهایتاً این کمیت‌های جدید تشکیل بردار جدید $\mathbf{c}$ را می‌دهند. ما نیاز به یک نوشتار ریاضی جدید برای ارتباط بردار جدید با سه مؤلفه آن به بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ داریم. نوشتاری که برای این کار ابداع شده $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ است. در نتیجه، ما علاوه بر ضرب اسکالر معمولی در تئوری آنالیز برداری، یک نوع ضرب جدید به نام ضرب برداری (خارجی) داریم. به همین دلیل اگر $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ باشد این معادل است با نوشتن:

$$\begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y, \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z, \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x. \end{aligned} \quad (9.20)$$

اگر ما ترتیب $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عوض کنیم، یعنی $\mathbf{b}$ به جای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a}$ به جای $\mathbf{b}$ ، علامت $\mathbf{c}$ معکوس می‌شود. زیرا c_z تبدیل به $b_x a_y - b_y a_x$ می‌شود. به همین دلیل ضرب خارجی شبیه ضرب معمولی نیست که در آن $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ولی برای ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ از این رو ما می‌توانیم اثبات کنیم که اگر $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ باشد، ضرب خارجی صفر است. بنابراین $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. ضرب خارجی برای نشان دادن خصوصیات دوران بسیار مهم است و این نیز مهم است که ما ارتباط هندسی سه بردار $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ را بفهمیم. البته ارتباط بین مؤلفه‌ها در معادلات (9.20) داده شده است و با استفاده از این معادلات می‌توان به چستی این ارتباط هندسی دست یافت. پاسخ این است که اولاً بردار $\mathbf{c}$ به صورت حاصل ضرب اندازه $\mathbf{a}$ اندازه $\mathbf{b}$ ضرب در سینوس زاویه بین این دو به دست می‌آید. $\mathbf{c}$ به چه

جهتی اشاره می‌کند؟ تصور کنید که ما $\mathbf{a}$ را در زاویه‌ای کمتر از 180° به سمت $\mathbf{b}$ بچرخانیم، یک پیچ راست‌گرد که به این صورت می‌چرخد، در جهت $\mathbf{c}$ پیش خواهد رفت. این حقیقت که ما می‌گوییم یک پیچ راست‌گرد به جای یک پیچ چپ‌گرد، یک قرارداد و یادآور دائمی است که اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای صادق در حالت معمول باشند، نوع بردار جدیدی که ما توسط $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ایجاد کرده‌ایم مصنوعی و یا از $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از جهت ماهیت کمی متفاوت است، زیرا به وسیله یک رابطه خاص ایجاد شده است. اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهای معمولی نامیده شوند، ما یک نام خاص برای آن‌ها داریم، ما آن‌ها را بردارهای قطبی می‌نامیم. مثال‌هایی از این بردارها عبارتند از بردارهای مختصات مکان $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ ، تکانه $\mathbf{P}$ ، سرعت $\mathbf{v}$ ، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ و غیره. این‌ها بردارهای قطبی معمولی هستند. بردارهایی که شامل فقط یک ضرب خارجی در تعریف‌شان هستند، بردارهای محوری یا شبه بردارها نامیده می‌شوند. مثال‌هایی از شبه بردارها شامل تکانه زاویه‌ای $\mathbf{L}$ و البته گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ می‌شوند. همچنین مشاهده می‌شود که سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ نیز یک شبه بردار است، همانطور که میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ نیز است.

برای کامل کردن خصوصیات ریاضی بردارها، ما باید تمام قوانین ضرب داخلی و خارجی آن‌ها را بدانیم. در حال حاضر در کاربردها ما به مقدار کمی از این قوانین نیاز خواهیم داشت اما برای کامل بودن، ما تمام قوانین ضرب بردارها را می‌نویسیم که بعداً از این نتایج استفاده می‌کنیم. این قوانین عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \\
 (b) \quad & (\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\
 (c) \quad & \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}, \\
 (d) \quad & \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\
 (e) \quad & \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}, \\
 (f) \quad & \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{۱۰.۲۰}$$

۲۰۲. معادلات دوران با استفاده از ضرب‌های خارجی

حالا اجازه دهید که بپرسیم آیا هر معادله در فیزیک را می‌توان با استفاده از ضرب خارجی نوشت. پاسخ این است که البته تعداد بسیار زیادی از معادلات قابلیت نوشته شدن با ضرب خارجی را دارند. برای مثال ما می‌بینیم که گشتاور برابر ضرب خارجی بردار مکان و نیرو است.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{۱۱.۲۰}$$

این یک خلاصه برداری از سه معادله $\tau_x = yF_z - zF_y$ و غیره است. به همین ترتیب اگر فقط یک ذره داشته باشیم، بردار تکانه زاویه‌ای عبارت است از فاصله مبدأ ضرب خارجی در بردار تکانه:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (12.20)$$

برای دوران در فضای سه بعدی، قانون دینامیکی مشابه قانون $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ نیوتن اینگونه است که بردار گشتاور برابر میزان تغییرات زمانی بردار تکانه زاویه است.

$$\tau = d\mathbf{L}/dt. \quad (13.20)$$

اگر ما معادله (۱۳.۲۰) را برای تمام ذرات جمع بزنیم، گشتاور خارجی وارده بر سیستم برابر میزان تغییرات تکانه زاویه کل خواهد بود.

$$\tau_{\text{ext}} = d\mathbf{L}_{\text{tot}}/dt. \quad (14.20)$$

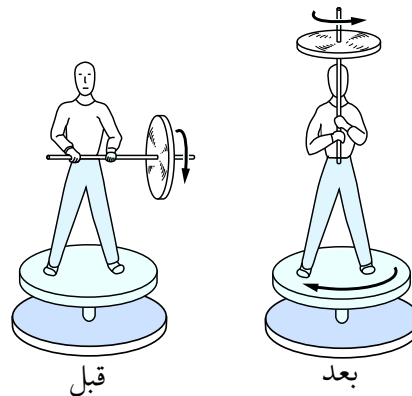
یک اصل دیگر: اگر گشتاور خارجی کل صفر باشد، بردار تکانه زاویه‌ای سیستم یک مقدار ثابتی خواهد بود. این قانون بقای تکانه زاویه نامیده می‌شود. در صورتی که گشتاور خارجی به سیستم وارد نشود، تکانه زاویه‌ای آن نمی‌تواند تغییر کند.

سرعت زاویه‌ای چطور؟ آیا یک بردار است؟ ما تا اینجا دوران یک جسم صلب حول یک محور را توضیح داده‌ایم، اما حالا در نظر بگیرید که ما جسم را به طور هم‌زمان حول دو محور دوران بدهیم. شاید جسم در حال دوران حول یک محور داخل یک جعبه باشد در حالی که جعبه حول محور دیگری دوران می‌کند. نتیجه خالص یک چنین حرکت ترکیبی این است که جسم به سادگی حول یک محور جدید دوران می‌کند. نکته قابل توجه در مورد این محور این است که به طریق زیر می‌توان آن را به دست آورد. اگر میزان دوران در صفحه xy به صورت یک بردار در جهت z نوشته شود که طول آن برابر با میزان دوران در صفحه است، و اگر بردار دیگری در جهت y کشیده شود که همان نرخ دوران در صفحه zx است، آنگاه اگر ما این دو را به عنوان یک بردار به هم اضافه کنیم، اندازه حاصل به ما می‌گوید که جسم چقدر سریع دوران می‌کند و جهت نیز به ما می‌گوید در چه صفحه‌ای دوران می‌کند که این نتایج با استفاده از روش متوازی الاضلاع حاصل می‌شود. این بدین معنی است که بگوییم سرعت زاویه، یک بردار است که ما اندازه دوران‌ها در سه صفحه را به صورت تصویر در زوایای قائمه نسبت به صفحات ترسیم می‌کنیم.^۱

به عنوان یک کاربرد ساده از بردار سرعت زاویه‌ای ما توان مصرفی گشتاور بر روی یک جسم صلب را محاسبه می‌کنیم. البته توان، میزان تغییرات کار با زمان است. در سه بعد توان به صورت زیر به دست می‌آید، $P = \tau \cdot \omega$.

^۱درستی این عبارت را می‌توان با ترکیب جابه‌جایی ذرات این جسم در بازه زمانی دیفرانسیل Δt به دست آورد. این مسئله به خودی خود روشن نیست، و اثبات آن به کسانی که علاقه دارند از آن سر در بیاورند واگذار می‌شود.

تمام فرمول‌هایی که ما برای دوران صفحه‌ای نوشتیم را می‌توان به سه بعد تعمیم داد. برای مثال اگر یک جسم صلب حول یک محور مشخص با سرعت زاویه‌ای ω در حال دوران باشد، ممکن است بپرسیم: «سرعت یک نقطه در موقعیت شعاعی مشخص $\mathbf{r}$ چیست؟» ما نشان دادن اینکه سرعت یک ذره در جسم صلب توسط $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ به دست می‌آید را به عنوان مسئله بر عهده دانشجویان می‌گذاریم، که در آن ω سرعت زاویه‌ای و $\mathbf{r}$ موقعیت (مختصات) مکانی است. همچنین به عنوان مثال دیگری از ضرب خارجی، ما فرمولی برای نیروی کربولیس داشتیم، که با استفاده از ضرب خارجی نیز می‌تواند به صورت $\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v} \times \omega$ نوشته شود. به طوری که اگر یک ذره با سرعت $\mathbf{v}$ در یک دستگاه مختصات که با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، در حال حرکت باشد و ما بخواهیم بر حسب مختصات دستگاه دوار فکر کنیم، در نتیجه باید نیروی مجازی (شبه نیرو) $\mathbf{F}_c$ را اضافه کنیم.

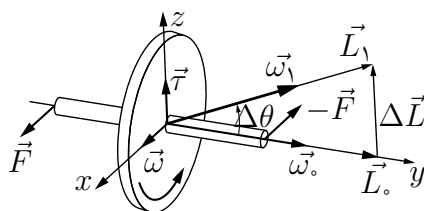


شکل ۱.۲۰: قبل: محور افقی است، ترک حول محور قائم $= 0^\circ$. بعد: محور قائم است. ممثوم حول محور قائم هنوز صفر است، شخص و صندلی در جهت عکس دوران دیسک دوران می‌کنند.

۳.۲۰ ژيروسکوپ

بیا باید حالا به قانون بقای تکانه زاویه‌ای بازگردیم. این قانون را می‌توان با یک چرخ که با سرعت می‌چرخد نشان داد که در ادامه در شکل (۱.۲۰) می‌بینید. اگر بر روی یک صندلی دوار بنشینیم و یک دیسک دوار با محور افقی را نگه داریم، دیسک دارای یک تکانه زاویه‌ای حول محور افقی خواهد بود. تکانه زاویه‌ای حول یک محور قائم به علت نبود اصطکاک در نقطه دوران صندلی نمی‌تواند تغییر کند و در نتیجه اگر ما محور دیسک را به حالت قائم دوران دهیم، آنگاه دیسک تکانه‌ای زاویه‌ای حول محور قائم خواهد داشت، زیرا در این حالت حول این محور دوران می‌کند. اما سیستم (دیسک، صندلی و خودمان) نمی‌تواند مؤلفه قائم داشته باشد و در نتیجه ما و صندلی باید در جهت عکس چرخش دیسک دوران کنیم تا تعادل آن حفظ شود.

اول اجازه دهید چیزی را که توضیح داده‌ایم در جزئیات بیشتری تحلیل کنیم. چیزی که ما باید بفهمیم و جالب است، مبدأ نیروهایی است که ما و صندلی را در حالی که ما محور ژيروسکوپ را به سمت قائم دوران می‌دهیم، می‌چرخاند. شکل (۲۰.۲۰) دیسکی که به سرعت حول محور y دوران می‌کند را نشان می‌دهد. از این رو سرعت زاویه‌ای آن حول همان محور است و مشاهده می‌شود که تکانه زاویه‌ای آن نیز در همان جهت است. حال فرض کنید که می‌خواهیم دیسک را با سرعت زاویه کم Ω حول محور x دوران دهیم، چه نیروهایی مورد نیازند؟ بعد از گذشت زمان کوتاه Δt ، محور y به موقعیت جدیدی دوران می‌یابد که با زاویه $\Delta\theta$ نسبت به افق نشان داده شده است.



شکل ۲۰.۲۰: ژيروسکوپ

از آنجایی که بخش عمده تکانه زاویه‌ای به خاطر دوران حول محور y است (بخش کمی از آن به علت دوران با سرعت کم Ω است)، ما می‌بینیم که بردار تکانه زاویه‌ای تغییر کرده است. تغییر تکانه زاویه‌ای چه مقدار است؟ اندازه تکانه زاویه‌ای تغییر نمی‌کند، اما جهت آن به اندازه $\Delta\theta$ تغییر می‌کند. به همین دلیل اندازه بردار ΔL برابر است با $L_0 \Delta\theta$ و در نتیجه گشتاور که میزان تغییرات زمانی تکانه زاویه‌ای است برابر است با $\tau = \Delta L / \Delta t = L_0 \Delta\theta / \Delta t = L_0 \Omega$. با در نظر گرفتن جهات مقادیر مختلف می‌توان مشاهده کرد که :

$$\tau = \Omega \times L_0. \quad (15.20)$$

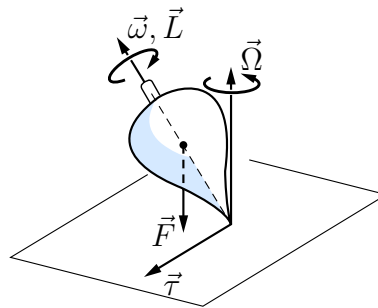
در نتیجه اگر Ω و L_0 هر دو افقی باشند، همان طور که در شکل نشان داده شده است τ قائم است. برای تولید چنین گشتاوری نیروهای افقی F و $-F$ باید هر دو در انتهای محور وارد شوند. این نیروها چگونه وارد می‌شوند؟ با استفاده از دستانمان، همانطور که سعی می‌کنیم محور چرخ را به جهت قائم دوران دهیم. اما قانون سوم نیوتن ایجاب می‌کند که نیروهای معادل و در خلاف جهت (و گشتاورهای معادل و در خلاف جهت) بر روی ما عمل کنند. این باعث می‌شود که ما در جهت خلاف محور قائم z دوران کنیم.

این نتایج را می‌توان برای یک فرفره که به سرعت می‌چرخد نیز تعمیم داد. در حالت معمول یک فرفره دوار، نیروی جاذبه‌ای که بر روی مرکز جرم آن عمل می‌کند، گشتاوری را حول نقطه تماس با

زمین ایجاد می‌کند (شکل ۳.۲۰ را ببینید). این گشتاور در جهت افقی قرار دارد و باعث می‌شود در حالی که فرفره در یک مخروط دایره‌ای حول محور قائم حرکت می‌کند، دچار تقدیم^۲ شود. اگر Ω سرعت زاویه‌ای (قائم) تقدیم باشد، ما دوباره خواهیم داشت:

$$\tau = d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}.$$

به همین دلیل وقتی یک گشتاور بر یک فرفره که به سرعت می‌چرخد اعمال می‌کنیم، جهت حرکت تقدیمی هم‌جهت با گشتاور است و یا در زوایای قائم نسبت به نیروهای ایجاد کننده گشتاور است.



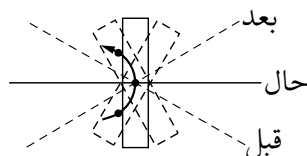
شکل ۳.۲۰: یک فرفره با سرعت دورانی بالا. دقت کنید که جهت بردار ترک همان جهت تقدیم محور است.

حال ما می‌توانیم ادعا کنیم که تقدیم ژيروسکوپ را می‌فهمیم، البته به صورت ریاضیاتی. اگر چه که این یک چیز ریاضیاتی است اما تا حدی یک «معجزه» به نظر می‌رسد. خواهیم دید که هر چه بیشتر و بیشتر به سمت فیزیک پیشرفته می‌رویم، بسیاری چیزهای ساده به صورت ریاضیاتی بسیار سریع‌تر قابل استنتاج هستند تا اینکه به صورت پایه‌ای یا با حس معمول بتوان واقعاً فهمیدشان. این یک خاصیت عجیب است و همینطور که بیشتر و بیشتر وارد کارهای پیشرفته می‌شویم، مواقعی هست که ریاضیات نتایجی ایجاد می‌کند که هیچ کس توانایی فهم آن را به صورت مستقیم نداشته است. یک مثال، معادله دیراک است که در شکلی زیبا و ساده ظاهر می‌شود اما نتایج آن به سختی قابل فهم هستند. در موارد خاص، انحراف مسیر فرفره شبیه به یک معجزه به نظر می‌رسد که شامل زوایای قائم، دواير و پیچش و پیچ‌های راست‌گرد می‌شود. چیزی که باید تلاش کنیم انجام دهیم، فهمیدن هر چه بیشتر آن به صورت فیزیکی است.

چطور می‌توان گشتاور را برحسب نیروهای واقعی و شتاب‌ها توصیف کرد؟ توجه داریم که وقتی دیسک در حال تقدیم است، ذراتی که در اطراف دیسک حرکت می‌کنند، واقعاً روی یک صفحه حرکت نمی‌کنند، زیرا دیسک دست‌خوش تقدیم است (شکل ۴.۲۰ را ببینید). همان‌طور که در گذشته

²Precession

توضیح دادیم (شکل ۴.۱۹)، ذراتی که از محور تقدیم می‌گذرند در مسیرهای خمیده^۳ حرکت می‌کنند و این نیاز به وجود نیروهای جانبی دارد. این نیروها با فشار ما بر روی محور (اکسل) و سپس از طریق پره‌ها^۴ به حلقه^۵ دیسک انتقال می‌یابند.



شکل ۴.۲۰: حرکت ذرات در دیسک در حال دوران شکل ۲.۲۰، که محور آن در حال دوران است، در خطوط منحنی وار است.

یک نفر گفت: «صبر کنید پس ذراتی که در طرف دیگر به عقب حرکت می‌کنند چه؟» زمان زیادی طول نمی‌کشد که تصمیم بگیریم که باید یک نیرو در جهت مخالف در طرف دیگر باشد. در نتیجه نیروی خالصی که ما باید اعمال کنیم صفر است. نیروها همدیگر را خنثی می‌کنند، اما یکی از آن‌ها باید در یک انتها وارد شود و دیگری باید در انتهای دیگر دیسک اعمال شود. ما می‌توانستیم این نیروها را به صورت مستقیم اعمال کنیم اما چون دیسک صلب است ما اجازه داریم این کار را با فشار بر روی محور (اکسل) انجام دهیم. زیرا نیروها می‌توانند از طریق پره‌ها منتقل شوند.

چیزی که تا به اینجا اثبات کرده‌ایم این است که اگر دیسک در حال تقدیم باشد، می‌تواند گشتاور ناشی از جاذبه و یا گشتاورهای اعمالی دیگر را متعادل کند. اما تمام چیزی که نشان داده‌ایم این است که این پاسخ یک معادله است. این طور که اگر گشتاور داده شده باشد و اگر دوران در همان لحظه شروع شود، سپس دیسک به آرامی و یکنواختی تقدیم خواهد کرد. اما ما اثبات نکرده‌ایم (و درست هم نیست) که یک تقدیم یکنواخت، کلی‌ترین حالت حرکتی باشد که یک جسم دوار در اثر یک گشتاور می‌تواند داشته باشد. حرکت کلی شامل یک لرزش^۶ حول تقدیم میانی نیز هست. این لرزش رقص محوری^۷ نامیده می‌شود.

بعضی افراد تمایل دارند که بگویند وقتی کسی یک گشتاور بر ژيروسکوپ اعمال می‌کند، می‌چرخد و دست‌خوش تقدیم می‌شود و اینکه گشتاور، حرکت تقدیمی را ایجاد می‌کند. این خیلی عجیب است که وقتی ژيروسکوپ را رها می‌کنیم تحت اثر جاذبه سقوط نمی‌کند، اما در عوض به اطراف حرکت می‌کند. چرا اینطور است که نیروی رو به پایین جاذبه، که ما آن را می‌شناسیم و حس می‌کنیم، باعث می‌شود تا جسم به اطراف حرکت کند؟ تمام فرمول‌های شبیه به (۱۵.۲۰) در جهان

³Curved paths

⁴Spokes

⁵Rim

⁶Wobbling

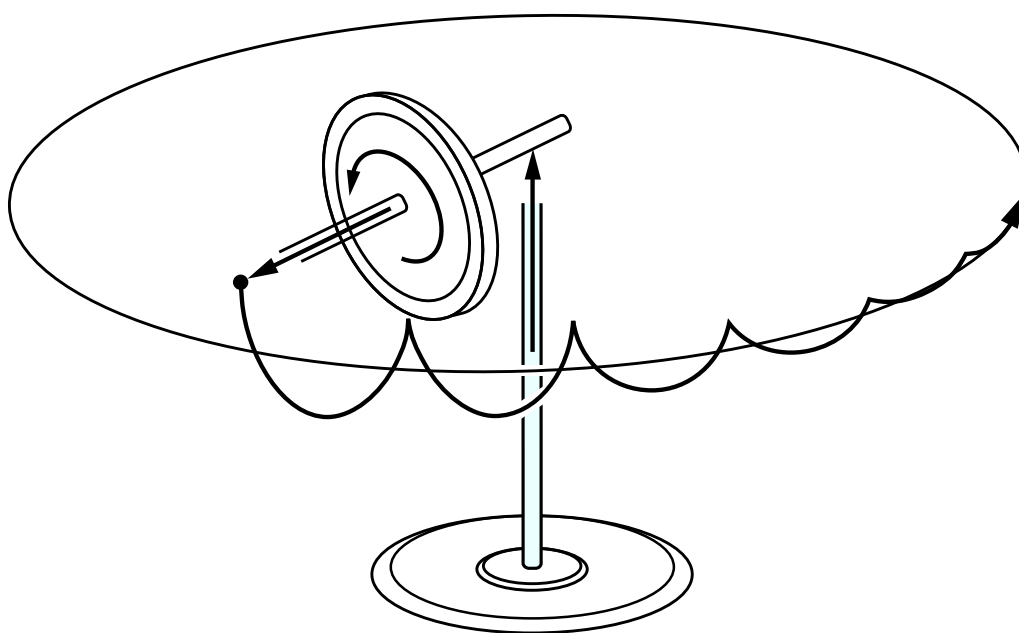
⁷Nutation

به ما چرایی آن را نخواهند گفت، زیرا (۱۵.۲۰) یک معادله خاص است و تنها برای حرکت تقدیمی یکنواخت ژيروسکوپ قابل استفاده است. چیزی که واقعاً اتفاق می‌افتد به صورت جزئی در ادامه خواهد آمد. اگر قرار بود که ما محور را کاملاً ثابت نگه داریم که نتواند به هیچ شکلی دچار تقدیم شود (در حالی که دیسک دوران می‌کند)، آنگاه هیچ گشتاور اعمالی، حتی گشتاور ناشی از جاذبه نیز وجود نخواهد داشت، زیرا به واسطه برقرار شده است. اما اگر محور را به طور ناگهانی رها کنیم آنگاه به صورت آنی گشتاور ناشی از جاذبه وجود خواهد داشت. هر کسی در ذهن خود به این فکر می‌افتد که دیسک سقوط خواهد کرد و این چیزی است که در ابتدا شروع به اتفاق افتادن می‌کند، همانطور که اگر سرعت دورانی دیسک خیلی سریع نباشد، باز همین اتفاق قابل انتظار است.

همانطور که توقع داریم ژيروسکوپ واقعاً سقوط خواهد کرد. اما به محض اینکه سقوط می‌کند، دچار چرخش می‌شود و اگر این چرخش قرار بود ادامه پیدا کند، نیاز به یک گشتاور داشتیم. در غیاب این گشتاور در این جهت، ژيروسکوپ شروع به سقوط در جهت عکس نیروی غایب می‌کند (نیروی ایجاد کننده گشتاور غایب). این به ژيروسکوپ یک مؤلفه حرکت حول محور قائم می‌دهد، همانند وقتی که حرکت تقدیمی پایدار فراتر^۸ می‌رود و محور در واقع به حالتی که از آن شروع به سقوط کرده است دوباره برمی‌خیزد. مسیری را که انتهای محور طی می‌کند یک سیکلوئید است (مسیری که خرده سنگی که بین عاج‌های تایر یک اتومبیل گیر کرده است، طی می‌کند). معمولاً این حرکت خیلی سریع اتفاق می‌افتد و با چشم قابل مشاهده نیست و خیلی سریع به علت اصطکاک موجود در حلقه^۹ بیرینگ‌ها دچار میرایی می‌شود و تنها حرکت تقدیمی پایدار را باقی می‌گذارد (شکل ۵.۲۰). هرچه دیسک آهسته‌تر دوران کند، رقص محوری واضح‌تر خواهد بود.

وقتی که حرکت پایدار می‌شود، محور ژيروسکوپ کمی پایین‌تر از حالت شروع قرار می‌گیرد، چرا؟ (اینها جزئیات پیچیده‌تری هستند، اما ما برای اینکه خواننده تصور نکند که حرکت ژيروسکوپ یک معجزه محض است، آن را در اینجا مطرح می‌کنیم. ژيروسکوپ چیز جالبی است اما معجزه نیست.) اگر ما محور را کاملاً افقی نگه داریم و ناگهان رها کنیم، سپس معادله ساده تقدیم به ما خواهد گفت که دچار تقدیم می‌شویم، به این صورت که در یک صفحه افقی به اطراف حرکت خواهیم داشت. ولی این غیر ممکن است! اگرچه در گذشته از آن صرف‌نظر کردیم ولی این درست است که دیسک دارای گشتاور لختی^{۱۰} حول محور تقدیم است و اگر در حال حرکت، حول آن محور باشد، حتی به آرامی، دارای یک تکانه زاویه‌ای ضعیف حول آن محور خواهد بود. این از کجا آمد؟ اگر نقاط اتکاء ایده‌آل باشند، هیچ گشتاوری حول محور قائم وجود نخواهد داشت. پس چطور دچار حرکت تقدیمی می‌شود اگر تغییری در تکانه زاویه‌ای وجود نداشته باشد! پاسخ این است که حرکت سیکلوئیدی انتهای محور به میانگین حرکت پایدار مرکز دایره دوار معادل، دمپ (دچار میرایی)

⁸Overshoots⁹Gimbal¹⁰Moment of inertia



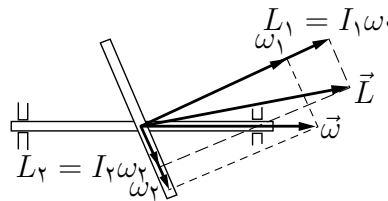
شکل ۵.۲۰: حرکت واقعی نوک محور ژيروسکوپ تحت نیروی جاذبه دقیقاً پس از رها کردن محور آن که ثابت نگه داشته شده بود.

می‌شود. به این صورت که کمی پایین‌تر پایدار می‌شود. چون پایین است، تکانه زاویه‌ای دوران حول یک مؤلفه کوچک قائم دارد که دقیقاً همان چیزی است که برای تقدیم نیاز است. در نتیجه می‌بینید که باید کمی پایین بروید تا بتواند به اطراف حرکت کند. جسم باید کمی تسلیم جاذبه شود، با کمی چرخاندن محور دوران به سمت پایین حرکت دورانی خود را حول محور قائم حفظ می‌کند، که این نحوه عملکرد ژيروسکوپ است.

۴.۲۰ تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم صلب

قبل از اینکه موضوع دوران در سه بعد را رها کنیم حداقل به‌طور کیفی به توضیح برخی پیامدهایی که در دوران در سه بعد اتفاق می‌افتند و بدیهی نیستند، می‌پردازیم. اصلی‌ترین پیامد در حالت کلی این است که تکانه زاویه‌ای یک جسم صلب لزوماً هم جهت با سرعت زاویه‌ای نخواهد بود. یک دیسک را در نظر بگیرید که به صورت نامتقارن بر روی یک شفت (میله، محور) نصب شده است، به طوری که محور شفت از مرکز جرم آن عبور می‌کند (شکل ۶.۲۰). وقتی ما دیسک را حول محور، دوران می‌دهیم هر کسی می‌داند که به علت اینکه آن را نامتقارن نصب کرده‌ایم، در بیرینگ‌ها لرزش خواهیم

داشت. ما به صورت کیفی می‌دانیم که در سیستم دوار نیروی گریز از مرکز^{۱۱} بر روی دیسک عمل می‌کند، که سعی دارد جرم آن را به دورترین فاصله ممکن نسبت به مرکز پرتاب کند. این باعث می‌شود که صفحه دیسک را بر محور عمود کند. برای مقابله با این تمایل، یک گشتاور توسط بیرینگ‌ها اعمال می‌شود. اگر گشتاوری توسط بیرینگ‌ها اعمال می‌شود، باید میزان تغییرات تکانه زاویه‌ای نیز وجود داشته باشد. چطور ممکن است که میزان تغییرات تکانه زاویه‌ای وجود داشته باشد در حالی که ما تنها در حال دوران دیسک حول محور هستیم؟ فرض کنید که ما سرعت زاویه را به دو مؤلفه ω_1 و ω_2 تقسیم کنیم، که موازی و عمود بر صفحه دیسک هستند. مقدار تکانه زاویه‌ای چیست؟ گشتاور لختی حول این دو محور متفاوت هستند، در نتیجه مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای که (در این حالت برای محورهای خاص) برابر گشتاور لختی ضرب در مؤلفه‌های سرعت زاویه متناظر هستند، در نسبت‌های متفاوتی نسبت به مؤلفه‌های سرعت دورانی هستند. در نتیجه بردار تکانه زاویه‌ای در فضا در راستای محور نخواهد بود. وقتی ما جسم را می‌چرخانیم، باید بردار تکانه زاویه‌ای را در فضا بچرخانیم، در نتیجه باید بر روی شفت‌ها گشتاور اعمال کنیم.



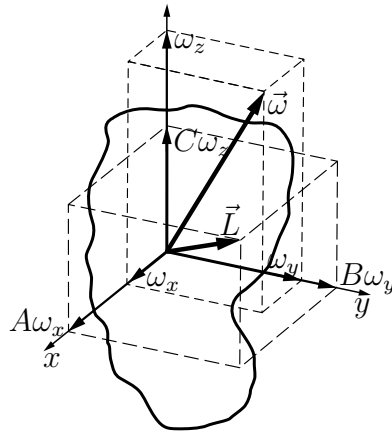
شکل ۴.۲۰: ممنتوم زاویه‌ای یک جسم دوار لزوما موازی با سرعت زاویه‌ای نیست.

با این حال بسیار سخت است که اثبات کنیم، گشتاور لختی، خصوصیت بسیار جالب و مهمی دارد که به سادگی می‌توان آن را توصیف و از آن استفاده کرد و پایه تحلیلی است که در بالا آمده است. این خصوصیت چیزی است که در ادامه می‌آید: هر جسم صلبی، حتی یک جسم با شکل بی‌قاعده مانند سیب‌زمینی، دارای سه محور عمود بر هم است که از مرکز جرم می‌گذرند به طوری که گشتاور لختی حول یکی از این محورها دارای بیش‌ترین مقدار ممکن نسبت به هر محور دیگری است که از مرکز جرم بگذرد. گشتاور لختی حول یکی دیگر از این محورها دارای حداقل مقدار ممکن است و گشتاور لختی حول سوم مقدار میانگین بین این دو محور دیگر را دارد (یا برابر یکی از آنهاست). این محورها محورهای اصلی جسم نامیده می‌شوند و دارای این خصوصیت مهم هستند که اگر جسم در حال دوران حول یکی از آنها باشد، تکانه زاویه‌ای آن، هم‌جهت با سرعت زاویه‌ای خواهد بود. برای یک جسم دارای محورهای تقارن، محورهای اصلی^{۱۲} در راستای محورهای تقارن

¹¹Centrifugal force

¹²Principal axes

خواهند بود.



شکل ۷.۲۰: سرعت زاویه‌ای و تکانه زاویه‌ای یک جسم صلب ($A > B > C$).

اگر فرض کنیم که محورها x ، y و z در راستای محوره‌های اصلی باشند و گشتاورهای لختی متناظر اصلی را A ، B و C بنامیم، به راحتی می‌توانیم تکانه زاویه‌ای و انرژی جنبشی جسم را برای هر سرعت زاویه‌ای ω محاسبه کنیم. اگر ما ω را به مؤلفه‌های ω_x ، ω_y و ω_z در راستای محورها x ، y و z از بردارهای یک‌ه‌ای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ در راستای x ، y و z استفاده کنیم، می‌توانیم تکانه زاویه‌ای را به صورت زیر بنویسیم:

$$\mathbf{L} = A\omega_x\mathbf{i} + B\omega_y\mathbf{j} + C\omega_z\mathbf{k}. \quad (۱۶.۲۰)$$

انرژی جنبشی دوران به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \text{KE} &= \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (۱۷.۲۰)$$