

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 19

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۱۹
مترجم: یگانه بهاری، زهره رشنودی، سجاد پورمنوچهری
ویراستاران: زهره رشنودی
حروفچین: سجاد پورمنوچهری
نسخه‌ی ۱۰۰ تابستان ۱۳۹۹
حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۱۹

مرکز جرم؛ گشتاور لختی

۱.۱۹ ویژگی‌های مرکز جرم

در فصل قبل دریافتیم که اگر نیروهای بسیار زیادی بر جسمی متشکل از ذرات گوناگون اعمال شوند، چه آن ذرات یک جسم صلب را تشکیل دهند و چه ندهند؛ و یا حتی ابری از ستارگان باشند و یا هر چیز دیگر، می‌توان مجموع همه نیروهای وارد بر آن جسم را (که در واقع نیروهای خارجی هستند، زیرا نیروهای داخلی با یکدیگر به تعادل رسیده‌اند) پیدا کرد، سپس اگر جسم را به صورت یک کل واحد در نظر بگیریم و بگوییم که جرم کلی آن M است، قطعاً نقطه‌ای درون این جسم وجود دارد که آن را مرکز جرم می‌نامیم، به گونه‌ای که تمام نیروی خارجی اعمال شده بر جسم، عامل شتاب در این نقطه است، و به نظر می‌رسد که تمام جرم جسم در همین نقطه متمرکز شده است. بیایید حالا با دقت و جزئیات بیشتری در مورد مرکز جرم بحث کنیم.

مکان مرکز جرم (به اختصار CM) از معادله زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}. \quad (1.19)$$

این معادله، در واقع، یک معادله برداری است که خود ترکیبی از سه معادله است و هر معادله در یکی از جهت‌های مختصاتی است. ما فقط معادله جهت x را در نظر می‌گیریم. چرا که اگر این معادله را درک کنیم، دو معادله دیگر را نیز خواهیم فهمید. معادله $X_{CM} = \sum m_i x_i / \sum m_i$ به چه معناست؟ فعلاً فرض کنید شیء مورد نظر ما به ذرات کوچک همجرمی با جرم m تقسیم شده است؛ آنگاه جرم کل جسم به سادگی برابر است با تعداد کل جرم‌های کوچک یعنی N ضرب در جرم هر یک از ذرات که جرم هر یک از آن‌ها برابر با m است، حالا می‌خواهد برحسب گرم باشد یا هر واحد دیگری. این

معادله به سادگی بیان می‌کند که همه x ها را جمع، و سپس تقسیم بر تعداد همه چیزهایی که جمع کرده‌ایم می‌کنیم: $X_{CM} = m\sum x_i / mN = \sum x_i / N$ به بیان دیگر، اگر جرم ذرات یکسان باشد، X_{cm} در واقع میانگین جرم تمام x ها خواهد بود. اما فرض کنید جرم یکی از ذرات دو برابر جرم بقیه ذرات باشد. هنگام جمع کردن، این ذره x دو بار ظاهر می‌شود. به بیان ساده می‌توان فرض کرد این ذره با جرم دو برابر به دو ذره با جرم‌هایی همانند باقی ذرات تقسیم شده است و جرم آن‌ها شبیه جرم بقیه ذرات می‌شود؛ در محاسبه میانگین هم باید این ذره را دو بار در نظر بگیریم زیرا جرمش دو برابر است. در نتیجه X مکان میانگین تمام جرم‌ها در راستای x است، به‌طوری که هر جرمی بنابر تعداد سهم جرمیش محاسبه می‌شود، انگار که به «اجزای خیلی کوچک‌تری» تقسیم شده باشد. از این بحث می‌توان به آسانی نتیجه گرفت که X باید مقداری بین بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار x باشد، و بنابراین جایی درون کل جسم قرار می‌گیرد. لزومی ندارد که مرکز جرم جزئی از ماده جسم باشد چرا که جسم می‌تواند یک دایره باشد مثل یک حلقه، که مرکز جرم آن در مرکز خود حلقه قرار دارد. البته اگر یک جسم از جهاتی متقارن باشد برای نمونه یک مستطیل، که سطحی متقارن دارد. مرکز جرم جایی بر روی این سطح متقارن قرار دارد. در مستطیل دو سطح وجود دارد که مستطیل را به شکل منحصربه‌فردی مکان‌یابی می‌کنند. اما اگر هر جسم متقارن دیگری هم باشد، مرکز گرانشش جایی بر روی محور تقارن جسم قرار می‌گیرد، زیرا در این گونه اجسام x های مثبت و منفی به یک اندازه وجود دارند.

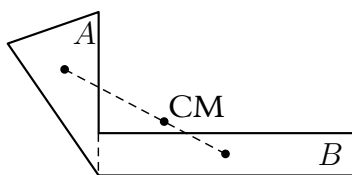
مسئله جالب دیگر، این مورد عجیبی است که در ادامه بیان می‌کنیم. فرض کنید شیئی داریم که از دو بخش A و B تشکیل شده است (شکل ۱۹.۱). مرکز جرم کل جسم به صورت زیر محاسبه می‌شود. ابتدا مرکز جرم هر یک از بخش‌های A و B را جداگانه محاسبه می‌کنیم همچنین جرم کل را در هر یک از بخش‌ها نیز محاسبه می‌کنیم. حالا یک مسئله جدید داریم که در آن جرم نقطه‌ای MA در مرکز جرم جسم A قرار دارد، و یک جرم نقطه‌ای دیگر MB در مرکز جرم جسم B است. مرکز جرم این دو جرم نقطه‌ای همان مرکز جرم کل جسم خواهد بود. به بیان دیگر اگر مراکز جرم بخش‌های مختلف یک جسم به‌دست آمده باشد، نیازی نیست برای به‌دست آوردن مرکز جرم کل جسم از ابتدا همه مسئله را حل کنیم، تنها کفایت بخش‌های مختلف جسم را کنار هم قرار دهیم و هر یک را جرمی نقطه‌ای در نظر بگیریم که در مرکز جرم هر بخش قرار گرفته‌اند. بیایید ببینیم چرا اینگونه است. فرض کنید می‌خواستیم مرکز جرم یک جسم مرکب را به‌دست آوریم، که بعضی از ذرات آن در بخش A قرار دارند و برخی از ذرات آن هم در بخش B هستند. جمع کل $\sum m_i x_i$ را میتوان به دو بخش تقسیم کرد - یعنی، مجموع $\sum A m_i x_i$ تنها برای جسم A و مجموع $\sum B m_i x_i$ که منحصر به جسم B است. حال اگر مرکز جرم جسم A را جداگانه حساب کنیم دقیقاً بخش اول این جمع را به‌دست آورده‌ایم، و می‌دانیم که جمع بخش اول برابر با $MA X_A$ است، یعنی جرم کل ذرات در بخش A ضرب در مکان مرکز جرم A ، چرا که این قانون مرکز جرم است، که بر جسم A

اِعمال می‌شود. به همین ترتیب در مورد جسم B ، $M_B X_B$ را به دست می‌آوریم، و البته، حاصل جمع این دو مجموع، می‌دهد MX :

$$\begin{aligned} MX_{CM} &= \sum_A m_i x_i + \sum_B m_i x_i \\ &= M_A X_A + M_B X_B. \end{aligned} \quad (۲.۱۹)$$

حالا با توجه به اینکه M حاصل جمع MA و MB است، می‌بینیم که معادله (۲.۱۹) را می‌توان به عنوان مثال خاصی از فرمول مرکز جرم برای دو جسم نقطه‌ای در نظر گرفت، که در آن MA در XA قرار دارد و جرم MB هم در XB .

اصل مربوط به حرکت مرکز جرم بسیار جالب است، و نقش مهمی در گسترش درک ما از فیزیک ایفا می‌کند. فرض کنید که ما درستی قانون نیوتن را برای اجزای کوچک یک جسم بزرگ‌تر بپذیریم. این اصل نشان می‌دهد، حتی اگر جزئیات این جسم را هم مطالعه نکنیم تنها با دانستن اینکه نیروی کلی وارد بر آن و جرم آن چقدر است؛ قانون نیوتن برای جسم بزرگ‌تر هم برقرار است. به بیان دیگر، قانون نیوتن این ویژگی عجیب را دارد که اگر در مقیاس کوچک و مشخصی درست باشد، آنگاه برای مقیاس بزرگ‌تر هم برقرار خواهد بود. اگر یک توپ بیسبال را به عنوان جسمی فوق‌العاده پیچیده متشکل از اجزای مختلف بی‌شماری که در برهم‌کنش با هم هستند، در نظر بگیریم و تنها حرکت مرکز جرم توپ و نیروهای خارجی وارد بر آن را مطالعه کنیم، خواهیم داشت $F = ma$ که در آن F نیروی خارجی کل وارد شده به توپ و m جرم کل آن و a شتاب مرکز جرم توپ است. در نتیجه $F = ma$ در مقیاس‌های بزرگ‌تر خود را بازتولید می‌کند. (ممکن است واژه مناسب‌تری در زبان یونانی برای توصیف قانونی که در یک مقیاس بزرگ‌تر هم بازتولید می‌شود، وجود داشته باشد.)



۱.۱۹. مرکز جرم یک جسم مرکب، بر روی خط واصل بین مرکزهای جرم دو بخش مجزای جسم قرار دارد.

حال این سؤال پیش می‌آید که: چرا اولین قوانین کشف شده توسط بشر همان‌هایی هستند که خود را در مقیاس بزرگ‌تر نیز بازتولید می‌کنند؟ زیرا مقیاس واقعی سازوکار و چرخ‌دنده‌های جهان، در ابعاد اتمی است، که در مقیاسی بسیار کوچک‌تر از مقیاس مشاهدات ماست و ما به هیچ وجه در مشاهدات معمولی خود در ابعاد آن مقیاس نیستیم. در نتیجه اولین چیزی که کشف می‌کنیم باید

برای اشیائی برقرار باشد که ابعادشان در مقیاس اتمی نیست. اگر قوانین صادق در ذرات کوچک، خودشان را در مقیاس بزرگتر بازتولید نکنند، ما به سادگی قادر به کشف آنها نبودیم. اما عکس این مسئله چگونه خواهد بود؟ آیا قوانین در مقیاس کوچک باید همانگونه باشند که در مقیاس بزرگ هستند؟ البته در طبیعت ضرورتی نیست اینگونه باشد که قوانین در یک سطح اتمی همانگونه باشند که در مقیاسی بزرگ رفتار می‌کنند. فرض کنید قوانین حرکت اتم‌ها توسط معادلات عجیبی داده شده باشد، که ویژگی‌هایش در مقیاس بزرگ‌تری که ما همان قوانین را بازتولید می‌کنیم، برقرار نباشد. اما، در عوض معادلاتی را ارائه می‌دهند که در ابعاد بسیار بزرگ‌تر، ویژگی‌های دیگری دارند، که بتوان در مقیاس بزرگ‌تر آنها را در حالت خاصی تقریب زد، به‌گونه‌ای که هر چقدر آن حالت را گسترش دهیم، بازتولید قوانین در مقیاس‌های به مراتب بزرگ‌تری فراهم می‌شود، این کار ممکن است و در حقیقت این همان سازوکار موجود است. قوانین نیوتن در واقع «انتهای دنباله» قوانین اتمی است و برای اندازه‌های بسیار بزرگ جواب می‌دهند. قوانین واقعی حرکت ذرات در یک مقیاس بسیار کوچک، خاص و عجیب هستند، اما اگر تعداد زیادی از این ذرات را با هم ترکیب کنیم، تنها تقریبی، تأکید می‌کنم، تنها تقریبی از قوانین نیوتن خواهند بود، از اینجا به بعد قوانین نیوتن به ما اجازه می‌دهند به مقیاس‌های خیلی بزرگ‌تری برویم و همچنان همان قوانین نیوتن حاکم باشد. در واقع، هر چه مقیاس‌ها بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند دقت قوانین نیوتن هم بیشتر و بیشتر می‌شود. این خصوصیت قوانین نیوتن، یعنی امکان بازتولید خود، یک ویژگی بنیادین در طبیعت نیست اما یک ویژگی تعیین‌کننده تاریخی است. ما هیچ‌گاه نمی‌توانستیم قوانین پایه‌ای ذرات اتمی را با مشاهدات اولیه کشف کنیم، چرا که مشاهدات اولیه بسیار خام و ابتدایی هستند. در واقع، قوانین اتمی که آنها را مکانیک کوانتوم می‌نامیم کاملاً با قوانین نیوتن متفاوت هستند و درک آنها دشوار است زیرا تمام آنچه ما تجربه کرده‌ایم در چارچوب اشیاء بزرگ است و مقیاس (چارچوب) کوچک اتم‌ها مانند هیچ چیزی که ما در مقیاس بزرگ، تجربه مشاهده آن را داریم، رفتار نمی‌کند. در واقع، هیچ گونه شهودی از چگونگی رفتار اتم‌ها نداریم. در نتیجه، نمی‌توانیم بگوییم که، «یک اتم درست شبیه است به سیاره‌ای که به دور خورشید می‌گردد». اتم‌ها شبیه هیچ چیزی که ما می‌شناسیم نیستند چرا که هیچ چیزی شبیه آنها نیست. هنگامی که مکانیک کوانتوم را برای اشیائی بزرگ‌تر به کار می‌بریم، قوانین کوانتومی برای رفتار اتم‌های بسیاری که در کنار هم قرار گرفته‌اند، خود را بازتولید نمی‌کنند، بلکه قوانین جدیدی به وجود می‌آید، که همان قوانین نیوتن هستند، که خود را برای اندازه‌های میکرو میکرو گرم بازتولید می‌کنند و این اندازه معادل میلیاردها میلیارد اتمی است که کنار هم قرار گرفته‌اند و قوانین نیوتن به این بازتولید تا اندازه‌هایی مثل کره زمین و بزرگ‌تر از آن ادامه می‌دهند.

حال به مرکز جرم باز می‌گردیم. مرکز جرم در بسیاری از مواقع مرکز گرانش نامیده می‌شود، زیرا در بسیاری موارد ممکن است که، گرانش، یکنواخت در نظر گرفته شود. بیایید فرض کنیم که ابعادی به اندازه کافی کوچک در اختیار داریم که در آن گرانش تنها متناسب با جرم نباشد، بلکه در همه جا

به موازات خطوطی، ثابت هم باشد. سپس جسمی را در نظر بگیرید که از اجزای مختلف تشکیل شده و به هر جزء آن نیروی گرانش وارد می‌شود. فرض کنیم m_i جرم هر بخش از این اجزا باشد و نیروی گرانش وارد بر هر یک از این اجزا برابر با $m_i g$ باشد؛ حال سؤال این است که بر کجای این جسم می‌توان نیرویی وارد کرد تا تعادل گرانشی کل جسم حفظ شود، به گونه‌ای که اگر جسم، صلب باشد، تغییر جهت ندهد (نچرخد)؟ پاسخ این است که این نیرو باید به مرکز جرم وارد شود، و در ادامه آن را نشان می‌دهیم. برای اینکه جسم چرخش پیدا نکند، مجموع گشتاورهای پدید آمده توسط نیروها باید صفر باشد، زیرا اگر گشتاور صفر نباشد موجب به وجود آمدن تکانه زاویه‌ای و در نتیجه آن، دروان می‌شود. پس باید مجموع گشتاور تمام اجزاء را محاسبه کرده و ببینیم که در هر محوری میزان گشتاور چقدر است، اگر محوری از مرکز جرم بگذرد باید گشتاور وارد بر آن صفر باشد. حال محور x را به صورت افقی و محور y را به صورت عمودی محاسبه می‌کنیم و می‌دانیم که میزان گشتاورها برابرند با کل نیروها در جهت y ضرب در بازوی اهرم x ، (به این معنا که، نیرو ضرب در بازوی اهرم محوری شود که می‌خواهیم گشتاور را در راستای آن محاسبه کنیم). اینجا گشتاور کل برابر مجموع زیر است:

$$\tau = \sum m_i g x_i = g \sum m_i x_i, \quad (3.19)$$

اگر گشتاور برابر با صفر باشد مجموع $\sum m_i x_i$ باید صفر باشد. اما $\sum m_i x_i = MX$ ، جرم کل ضرب در فاصله مرکز جرم از محور است. بنابراین، فاصله مؤلفه x مرکز جرم تا محور، صفر است. در واقع ما تنها، نتیجه را برای فاصله در جهت محور x محاسبه کرده‌ایم، اما اگر مرکز جرم واقعی را در نظر بگیریم، جسم در هر موقعیتی در حال تعادل خواهد بود، زیرا اگر ما جسم را ۹۰ درجه بچرخانیم، به جای محور x ، محور y را خواهیم داشت. به بیان دیگر، اگر جسم در مرکز جرم خود ثابت باشد، هیچ گشتاوری به آن وارد نشده است و این به علت توازن میدان گرانشی است. در موردی که جسم چنان بزرگ است که متوازن نبودن نیروهای گرانشی در آن مشهود است، مرکز آن، که باید نیروهای متعادل بر آن اعمال شود، به سادگی قابل توصیف نیست و این نیروی در حال تعادل از مرکز جرم کمی فاصله می‌گیرد. به همین علت است که باید میان مرکز جرم و مرکز گرانش تفاوت قائل شد. این واقعیت که جسمی که دقیقاً در مرکز جرم خود ثابت باشد (یا بر آن تکیه کرده باشد)، آن جسم در همه موقعیت‌ها در حال تعادل خواهد بود، پیامد جالب دیگری نیز به همراه دارد. اگر به جای گرانش نیروی دیگری شبیه به آن داشتیم که همین شتاب را بوجود می‌آورد، دقیقاً همان عملیات ریاضی را برای یافتن مکان تکیه‌گاه (تعادل) انجام می‌دادیم. به این ترتیب هیچ گشتاوری ناشی از نیروی لخت حاصل از شتاب به وجود نمی‌آمد. جسمی را درون یک جعبه فرض کنید که جعبه و تمام متعلقات آن دارای شتاب هستند، می‌دانیم که، از دید ناظری در حال سکون نسبت به این چارچوب، نیروی مؤثری در مقابل لختی وجود خواهد داشت، که بنابر آن برای اینکه جسم همراه با جعبه حرکت کند باید نیرویی به آن وارد کنیم تا شتاب بگیرد و این نیرو با نیروی لختی به تعادل

می‌رسد که نیروی مشابهی است که از حاصلضرب جرم در شتاب جعبه به دست می‌آید. برای ناظر داخل جعبه، شرایط مشابه وقتی است که شیء در یک میدان گرانشی یکنواخت قرار داشت و مقدار g آن برابر با شتاب a بود، در نتیجه نیروی لختی به این خاطر که به جسم شتاب می‌دهد، گشتاوری به مرکز جرم وارد نمی‌کند.

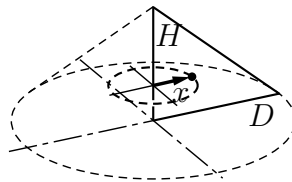
این واقعیت نتیجه جالبی در پی دارد. در چارچوب لختی بدون شتاب، گشتاور همواره برابر با تغییر تکانه زاویه‌ای است. برای محور گذرنده از مرکز جرم یک جسم هم که شتاب دارد، به طور مشابه گشتاور برابر با میزان تغییرات تکانه زاویه‌ای است. حتی اگر مرکز جرم شتاب داشته باشد ما باید محور خاصی، یعنی همان محوری که از مرکز جرم می‌گذرد را انتخاب کنیم، به طوری که برابری گشتاور با میزان تغییر تکانه زاویه‌ای حول آن محور، همچنان برقرار خواهد ماند. بنابراین، این اصل که گشتاور برابر با میزان تغییرات تکانه زاویه‌ای است، در دو حالت کلی برقرار است: (۱) یک محور ثابت در چارچوب لخت، (۲) محور گذرنده از مرکز جرم حتی اگر جسم شتاب داشته باشد.

۲.۱۹ مکان یابی مرکز جرم

روش‌های ریاضی برای محاسبه مکان مرکز جرم در حیطه ریاضیات است و این گونه مسائل تمرین خوبی برای محاسبات انتگرال هستند. پس از اینکه شخصی حسابان را آموخت و به هر تقدیر خواست بداند که چگونه می‌توان مراکز جرم را مکان یابی کرد، خوب است که ترفندهای کاربردی برای این کار را بیاموزد. یکی از این ترفندها این است که از قانونی به نام پایوس استفاده کند، که به این ترتیب عمل می‌کند: اگر سطح بسته‌ای را در نظر بگیریم و جسمی را با حرکت در فضا به وجود آوریم به گونه‌ای که هر نقطه از آن همواره در حال عمود بر محدوده سطح مورد نظر حرکت کند، جسم به وجود آمده دارای حجمی کلی برابر با حاصلضرب سطح مقطع در فاصله طی شده توسط مرکز جرم خواهد داشت! این در صورتی است که حرکت به صورت عمود بر سطح باشد، اما اگر حرکت به صورت دایره‌های یا هر منحنی دیگری باشد، حجمی به نسبت عجیب و غریب خواهد داشت. برای یک مسیر منحنی، سطح بیرونی تاب (دور) بیش‌تری می‌خورد و سطح درونی کم‌تر، و این بر تعادل جسم اثر خواهد گذاشت. در نتیجه برای مکان‌یابی مرکز جرم یک صفحه مسطح با چگالی یکنواخت، کافی است به یاد آوریم که حجم به وجود آمده به وسیله چرخش صفحه حول یک محور برابر با حاصل ضرب فاصله طی شده توسط مرکز جرم در مساحت صفحه است.

برای مثال اگر بخواهیم مرکز جرم یک مثلث قائمه با قاعده D و ارتفاع H را به دست آوریم (شکل ۲.۱۹)، باید به این ترتیب عمل کنیم: محوری را در راستای ارتفاع فرض کنیم و مثلث را حول آن به اندازه 360° درجه دوران دهیم. یک مخروط به دست می‌آید. مسافت طی شده در مختصات x از مرکز جرم برابر با $2\pi x$ است. سطح طی شده برابر با مساحت مثلث یعنی $\frac{1}{2}HD$ است. بنابراین،

فاصله طی شده افقی از مرکز جرم ضرب در مساحت مثلث؛ حجمی است که جارو شده است، که برابر است با $\pi D^2 H/3$. در نتیجه $\frac{1}{3}\pi D^2 H = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ یا $x = D/3$. به طور مشابه، با دوران حول محور دیگر، و یا با تقارن، درمی یابیم که $y = H/3$. در واقع، مرکز جرم هر سطح مثلثی یکنواخت جایی است که هر سه میانه، یعنی همان خط‌هایی که از رئوس بر میانه ضلع‌های روبه‌رو فرود می‌آیند، به همدیگر برخورد می‌کنند. آن نقطه برخورد $1/3$ طول هر یک از میانه‌هاست. راهنمایی: مثلث را با برش‌های کوچکی تکه تکه کنیم به گونه‌ای که هر یک به موازات قاعده مثلث باشند. می‌بینیم که خط میانه عمود بر قاعده، هر تکه را به دو بخش تقسیم می‌کند، و بنابراین مرکز جرم باید بر این خط قرار داشته باشد.



۲۰۱۹. مثلث قائم الزاویه و مخروط قائمه پدید آمده توسط دوران مثلث

حال به یک شکل پیچیده‌تر می‌پردازیم. فرض کنید می‌خواهیم مرکز جرم یک دیسک نیم‌دایره‌ای یکنواخت - دیسکی که از وسط به دو نیم تقسیم شده است - را محاسبه کنیم. مرکز جرم آن کجاست؟ برای یک دیسک کامل به وضوح مشخص است که مکان مرکز جرم در مرکز آن است اما برای دیسک نیم‌دایره‌ای پیدا کردن آن کمی دشوار است. اگر r را به عنوان شعاع و x را فاصله مرکز جرم از لبه دیسک در نظر بگیریم. دیسک را حول لبه‌اش دوران دهید تا یک کره به دست آید. آنگاه مرکز جرم $2\pi x$ جابه‌جا شده و مساحت آن $\pi r^2/2$ (چون دیسک ما نصف یک دایره است) است. حجم به دست آمده $4\pi r^3/3$ است که از آن خواهیم داشت:

$$(2\pi x)\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) = 4\pi r^3/3,$$

یا

$$x = 4r/3\pi.$$

یک اصل دیگری از پاپوس وجود دارد که حالت خاص مسئله بالا است، و بنابراین به طور مشابه برقرار است. فرض کنید به جای دیسک صلب نیم‌دایره‌ای، یک قطعه سیم نیم‌دایره‌ای داریم که چگالی جرمی آن در طول سیم یکنواخت است و ما می‌خواهیم مرکز جرم آن را محاسبه کنیم. در این مورد هیچ جرم داخلی وجود ندارد و فقط رویه سیم است. سپس معلوم می‌شود در هنگام حرکتی مشابه قبل، مساحتی که به وسیله خط منحنی مسطح جاروب شده است برابر است با فاصله‌ای که مرکز

جرم طی نموده ضرب در طول سیم (این سیم را می‌توان مانند یک مساحت خیلی باریک تصور کرد، و اصل پیشین را در مورد آن به کار گرفت).

۳.۱۹ یافتن گشتاور (اندازه حرکت) لختی

حال می‌خواهیم به بحث درباره یافتن اندازه حرکت لختی برای اشیاء گوناگون پردازیم. به بحث لختی دورانی اجسام مختلف می‌پردازیم. فرمول گشتاور لختی حول محور z برای یک شیء به صورت زیر است:

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

یا

$$I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + y^2) \rho dV. \quad (۴.۱۹)$$

به این ترتیب، باید تمام جرم‌ها را جمع کنیم و هر یک را در مربع فاصله‌شان از محور، $(x_i^2 + y_i^2)$ ضرب کنیم. توجه کنید که این فاصله، سه بعدی نیست، و تنها فاصله در دو بعد به توان دوم رسیده است و این کار را حتی برای اشیاء سه بعدی هم به همین صورت انجام می‌دهیم. در بیش‌تر مواقع، ما باید خود را به اشیاء دو بعدی محدود کنیم، اما فرمول دوران حول محور z نیز در سه بعد باز به همین شکل خواهد بود.

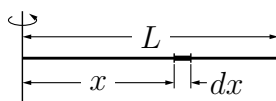
به عنوان یک مثال ساده فرض کنید یک میله حول محور عمود بر یک انتهای خود، دوران می‌کند (شکل ۳.۱۹). حال باید حاصل ضرب تمام جرم‌ها در مربع فاصله‌شان را با هم جمع کنیم (در این مورد مقادیر فاصله در محور y همگی صفر هستند). البته منظور ما از «جمع» در اینجا انتگرال x^2 ضرب در مقادیر کوچک جرم است. اگر ما میله را به اجزائی با مقادیر بسیار کوچک dx تقسیم کنیم، اجزای متناظر جرم نسبت‌هایی از dx هستند، و اگر dx طول کل میله باشد جرم آن M خواهد بود. بنابراین داریم:

$$dm = M dx/L$$

و در نتیجه

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M dx}{L} = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{ML^2}{3}. \quad (۵.۱۹)$$

ابعاد گشتاور (اندازه حرکت) همواره برابر حاصل ضرب جرم در مجذور فاصله خواهد بود، بنابراین همه آنچه که ما می‌باید به آن اضافه می‌کردیم همان ضریب $۱/۳$ است.



۳.۱۹. دوران یک میله راست به طول L حول محوری در یک انتهای میله

حال اگر محور دوران در مرکز میله قرار داشته باشد I چقدر می شود؟ کافیت یک بار دیگر انتگرال بگیریم و این بار دامنه x را از فرمول تا فرمول در نظر بگیریم. اما باید به نکاتی راجع به اندازه حرکت لختی توجه کنیم. می توانیم میله را دو میله تصور کنیم که جرم هر یک $M/2$ و طول هر یک نیز $L/2$ باشد؛ اندازه حرکت لختی این دو میله با هم برابر است، و از فرمول (۵.۱۹) می توان هر دوی آن ها را به دست آورد. در نتیجه اندازه حرکت لختی برابر است با:

$$I = \frac{2(M/2)(L/2)^2}{3} = \frac{ML^2}{12}. \quad (۶.۱۹)$$

در نتیجه دوران میله حول مرکزش آسان تر از چرخاندن میله حول یک انتهایش است. ما می توانیم اندازه حرکت لختی هر شیء دلخواهی را محاسبه کنیم. در حالی که این کار تمرین خوبی در محاسبات ریاضیاتی است، اما برای ما تا این حد مسئله ای ضروری نیست، هر چند که یک اصل بسیار جالب و کاربردی است. فرض کنید جسمی داریم، و می خواهیم اندازه حرکت آن را حول محوری به دست آوریم. این بدان معناست که ما لختی ای را می خواهیم که جسم را حول محور، دوران دهد. حال اگر جسمی در حال تعادل را حول محورهای گذرنده از مرکز جرم در نظر بگیریم که هنگام چرخش حول محور تغییر جهت نمی دهد (زیرا هیچ گشتاوری ناشی از اثرات لختی بر آن وارد نمی شود، و در نتیجه هنگامی که آن را حرکت می دهیم، نمی چرخد)، آنگاه نیروهای لازم برای اینکه آن را بچرخانند همانند وقتی است که تمام جرم جسم در مرکز جرم آن متمرکز شده باشد، و اندازه حرکت لختی به سادگی برابر است با $I_1 = MR_{CM}^2$ ، که در آن R_{CM} برابر با فاصله از محور دوران تا مرکز جرم است. اما البته این فرمول درستی برای اندازه حرکت لختی یک شیء که همزمان با چرخش در حال گردیدن است، نیست، زیرا نه تنها مرکز آن حول یک دایره حرکت می کند، که خود بر مقدار I_1 اندازه حرکت لختی اثر می گذارد، بلکه باید آن را حول مرکز جرمش هم بچرخانیم. بنابراین منطقی است که ما باید I_1 را به اندازه حرکت لختی I_C در مرکز جرم اضافه کنیم. در نتیجه تشخیص اینکه اندازه حرکت کلی لختی برای هر محوری از روش زیر به دست می آید، راه حل خوبی خواهد بود:

$$I = I_C + MR_{CM}^2. \quad (۷.۱۹)$$

این اصل، اصل محورهای موازی نامیده می شود، و احتمالاً به راحتی نیز اثبات می شود. اندازه حرکت لختی برای هر محوری برابر است با جرم ضرب در مجموع فواصل x_i و y_i که هر یک به توان دوم رسیده اند: $I = \sum (x_i^2 + y_i^2) m_i$. ما باید بر فواصل x تمرکز کنیم، اما البته فاصل y هم مهم

هستند. در اینجا x فاصله یک جرم نقطه‌ای مشخص از مبدأ است، اما بیایید ببینیم اگر x' را به جای فاصله x از مبدأ، فاصله طی شده از CM بدانیم، چه اتفاقی می‌افتد. برای اینکه بتوانیم این تحلیل را انجام دهیم، می‌نویسیم:

$$x_i = x'_i + X_{CM}.$$

آنگاه تنها این مقدار را به توان دوم می‌رسانیم تا مقدار زیر را به دست آوریم:

$$x_i^2 = x'^2_i + 2X_{CM}x'_i + X_{CM}^2.$$

حال، هنگامی که این مقدار را در m_i ضرب می‌کنیم و همه i ها را هم جمع می‌بندیم، چه به دست می‌آوریم؟ با خارج کردن مقادیر ثابت از نشان انتگرال (جمع)، خواهیم داشت:

$$I_x = \sum m_i x'^2_i + 2X_{CM} \sum m_i x'_i + X_{CM}^2 \sum m_i.$$

جمع سوم راحت است؛ و مقدار آن برابر است با MX_{CM}^2 . در جمع دوم دو بخش وجود دارد، یکی از آن‌ها $\sum m_i x'_i$ است که برابر است با جرم کل ضرب در مختصات x' از مرکز جرم. اما این هیچ چیزی را تغییر نمی‌دهد، زیرا x' از مرکز جرم اندازه‌گیری شده است، و در این محورها، مکان میانگین همه اجزاء (ذرات) که به نسبت جرم‌ها وزن شده‌اند، صفر است. جمع اول، البته، بخش x از I_c است. در نتیجه، به معادله (۷.۱۹) می‌رسیم، و این همان چیزی است که حدس زده بودیم.

بیایید معادله (۷.۱۹) را برای یک مثال بررسی کنیم. ببینیم آیا برای میله جواب می‌دهد یا نه. برای محوری حول یک انتهای میله، اندازه حرکت لختی باید $ML^2/3$ باشد. و این همان چیزی است که قبلاً محاسبه کرده بودیم. مرکز جرم یک میله، البته، در وسط میله در فاصله $L/2$ است. بنابراین ما باید به این معادله برسیم که: $ML^2/3 = ML^2/12 + M(L/2)^2$. از آنجایی که یک چهارم به علاوه یک دوازدهم می‌شود یک سوم، در نتیجه ما هیچ خطای بنیادینی مرتکب نشده‌ایم.

از قضا، ما برای پیدا کردن اندازه حرکت لختی نیازی به انتگرال گیری نداریم (۵.۱۹). اگر ما به سادگی فرض کنیم که اندازه حرکت لختی برابر است با ML^2 ضرب در یک ضریب ناشناخته γ ، و آنگاه همین برهان را برای دو نیمه به کار ببریم و برای معادله (۶.۱۹) $1/4\gamma$ را به دست آوریم، آنگاه از این برهان خود در مورد انتقال (جاب‌جایی) محورها می‌توانیم ثابت کنیم که $1/4\gamma + 1/4\gamma = 1/3$ باید برابر $1/3$ باشد. البته همواره راه‌های دیگری هم برای اثبات آن وجود دارد!

در پیاده کردن اصل محوره‌های موازی باید در نظر داشته باشیم محور گذرنده از مرکز جرم I_c باید موازی با محوری باشد که اندازه حرکت لختی آن خواسته شده است.

لازم است که در اینجا به یک ویژگی دیگر اندازه حرکت لختی اشاره کنیم زیرا در پیدا کردن اندازه حرکت لختی برخی اجسام (اشیاء) بسیار مفید و کارا خواهد بود. این ویژگی، این است که اگر جسمی یک سطح صاف داشته باشد به گونه‌ای که مبدأ یک دستگاه محوره‌های مختصات در صفحه

باشد که محور z آن بر صفحه عمود است، آنگاه اندازه حرکت این جسم حول محور z برابر است با جمع اندازه‌های حرکت حول محوره‌های x و y . و به راحتی با رابطه زیر اثبات می‌شود:

$$I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum m_i y_i^2$$

(چون $z_i = 0$ به طریق مشابه،)

$$I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum m_i x_i^2,$$

اما

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 \\ = I_x + I_y.$$

به عنوان مثال، اندازه حرکت لختی یک صفحه مستطیل شکل یکنواخت با جرم M ، عرض w ، و طول L ، حول یک محور قائم بر صفحه و گذرنده از مرکزش می‌شود:

$$I = M(w^2 + L^2)/12,$$

زیرا اندازه حرکت لختی آن (مستطیل) حول یک محور (قائم) در صفحه‌اش و موازی با طولش برابر است با $Mw^2/12$ ، یعنی، درست شبیه یک میله با طول w ، و اندازه حرکت لختی حول محور دیگر در صفحه‌اش $ML^2/12$ است، و این هم کاملاً همانند اندازه حرکت لختی میله به طول L است. به طور خلاصه می‌توان گفت، اندازه حرکت لختی برای یک جسم حول محور داده شده، که ما آن را محور z می‌نامیم، ویژگی‌های زیر را دارد:

۱. اندازه حرکت لختی عبارت است از:

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int (x^2 + y^2) dm.$$

۲. اگر جسم ما از چند بخش تشکیل شده باشد، که اندازه حرکت لختی هر یک از آن‌ها داده شده است، اندازه حرکت لختی کلی (مجموع) برابر است با مجموع اندازه حرکت‌های لختی هر یک از بخش‌ها.

۳. اندازه حرکت لختی حول هر محوری برابر است با اندازه حرکت لختی حول یک محور موازی گذرنده از مرکز جرم CM به علاوه جرم کلی ضرب در مجذور فاصله از محور تا مرکز جرم CM.

۴. اگر جسم یک شکل صفحه مانند دارد، اندازه حرکت لختی حول یک محور عمودی بر صفحه برابر است با مجموع اندازه حرکت‌های لختی حول هر دو محوری که دو به دو در صفحه بر هم عمودند و محور عمود بر صفحه را قطع می‌کنند. اندازه حرکت‌های لختی برخی اشکال اولیه که دارای چگالی جرمی یکنواخت هستند در جدول (۱.۱۹) داده شده است، و اندازه حرکت‌های لختی برخی اجسام دیگر را که می‌توان با استفاده از ویژگی‌های بالا از جدول (۱.۱۹) نتیجه گرفت، در جدول ۲.۱۹ داده شده است.

جدول ۱.۱۹

شیء	محور z	I_z
میلۀ باریک به طول L	$\perp$ میلۀ، گذرا بر مرکز	$ML^2/12$
حلقه نازک با دوایر هم‌مرکز، به شعاع‌های r_1 و r_2	$\perp$ حلقه، گذرا بر مرکز	$M(r_1^2 + r_2^2)/2$
کره، به شعاع r	گذرا بر مرکز	$2Mr^2/5$

جدول ۲.۱۹

شیء	محور z	I_z
صفحهٔ مستطیلی، به طول و عرض a, b	$b \parallel$ ، گذرا بر مرکز	$Ma^2/12$
صفحهٔ مستطیلی، به طول و عرض a, b	$\perp$ بر صفحه، گذرا بر مرکز	$M(a^2 + b^2)/12$
حلقهٔ دایره‌ای نازک، به شعاع‌های r_1, r_2	هر قطری از حلقه	$M(r_1^2 + r_2^2)/4$
مکعب مستطیل، به ابعاد a, b, c	$c \parallel$ ، گذرا بر مرکز	$M(a^2 + b^2)/12$
سیلندر دایره‌ای قائم، به شعاع r ، به طول L	$L \parallel$ ، گذرا بر مرکز	$Mr^2/2$
سیلندر دایره‌ای قائم، به شعاع r ، به طول L	$\perp L$ ، گذرا بر مرکز	$M(r^2/4 + L^2/12)$

۴.۱۹ انرژی جنبشی دورانی

حال بیش‌تر به مباحث دینامیکی می‌پردازیم. در بررسی دو حرکت خطی و دورانی که در فصل ۱۸ مطرح شد، از اصل کار نام بردیم، اما راجع به انرژی جنبشی حرفی نزدیم. انرژی جنبشی یک جسم صلب، در حال دوران حول یک محور مشخص با سرعت زاویه‌ای ω چقدر است؟ می‌توان با استفاده از چند مقایسه، بلافاصله پاسخ درست را حدس زد. اندازه حرکت لختی به جرم وابسته است، سرعت زاویه‌ای به سرعت، و بنابراین انرژی جنبشی باید $\frac{1}{2}I\omega^2$ باشد، و در واقع همین طور هم هست، و در ادامه آن را نشان خواهیم داد. فرض کنید جسمی در حال دوران (چرخش) حول محوری است به گونه‌ای که هر نقطه آن دارای سرعتی است که بزرگی آن ωr_i است، که در آن r_i برابر شعاعی است از آن نقطه مشخص تا محور. آنگاه اگر m_i جرم آن نقطه باشد، انرژی جنبشی کل برای همه جسم تنها برابر است با جمع انرژی‌های جنبشی همه بخش‌های کوچک جسم:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (r_i \omega)^2.$$

حالا ω^2 یک ثابت است، و برای همه نقاط یکسان است. در نتیجه داریم:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (۸.۱۹)$$

در پایان فصل ۱۸ ما به پدیده‌های جالبی در رابطه با اجسامی اشاره کردیم که صلب نیستند، اما از یک حالت صلب با یک اندازه حرکت لختی مشخص، به یک حالت صلب دیگر تغییر وضعیت می‌دهند. مثلاً در مورد صفحه گردان، ما یک اندازه حرکت لختی معین I_1 داشتیم که در آن بازوهایمان در حالت کشیده بود، و یک سرعت زاویه‌ای ω_1 . وقتی که بازوهایمان را جمع می‌کردیم، یک اندازه حرکت لختی متفاوت داشتیم، I_2 ، و یک سرعت زاویه‌ای متفاوت، ω_2 ، اما دوباره در یک وضعیت صلب خواهیم بود. با این حال تکانه زاویه‌ای ثابت ماند، زیرا هیچ گشتاوری حول محور عمودی بر صفحه گردان وجود نداشت. این بدان معناست که $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$. در نتیجه، اگر انرژی جنبشی را در این دو حالت با هم مقایسه کنیم، می‌بینیم که انرژی جنبشی در حالتی که دست‌هایمان کشیده است برابر است با فرمول، که در آن فرمول برابر است با تکانه زاویه‌ای. سپس، با برهانی مشابه داریم فرمول، و چون در این فرمول، انرژی جنبشی دوران (چرخش) بزرگ‌تر از چیزی است که قبلاً (در حالت قبل) بود، بنابراین وقتی که دست‌هایمان کشیده (باز) بود یک انرژی مشخص داشتیم، و وقتی که دست‌هایمان را جمع کرده بودیم، تندتر می‌چرخیدیم و در نتیجه انرژی جنبشی بیش‌تری داشتیم. چه اتفاقی برای اصل پایستگی انرژی افتاد؟ باید کسی کاری انجام داده باشد. ما کار انجام دادیم! اما کی؟ وقتی ما جسمی را به طور افقی جابه‌جا می‌کنیم، کاری انجام نداده‌ایم. اگر چیزی را نگه داریم چه با دستان کشیده و یا جمع شده، کاری انجام نداده‌ایم. اما این زمانی است که ما در حال چرخش نباشیم! وقتی می‌چرخیم، به وزن‌ها، نیروی گریز از مرکز وارد می‌شود، انگار که می‌خواهند

پرواز کنند، در نتیجه، ما هنگام چرخش مجبوریم وزن‌ها را در جهت مخالف نیروی گریز از مرکز، به سوی خود جمع کنیم. بنابراین، کاری که ما برای مقابله با نیروی گریز از مرکز انجام می‌دهیم، باید با تفاوت انرژی در هنگام چرخش در ارتباط باشد، و البته که همین طور است. و این همان جایی است که انرژی جنبشی اضافی از آن نشأت می‌گیرد.

یک ویژگی بسیار جالب دیگر هم وجود دارد، که ما می‌توانیم آن را تنها به عنوان یک علاقه‌مندی کلی، به صورت توصیفی شرح دهیم. این ویژگی تا اندازه‌ای پیشرفته است، اما ارزش این را دارد که به آن بپردازیم زیرا بسیار چالش برانگیز است و نتایج جالبی در پی دارد.

آزمایش صفحه‌دوار را دوباره به یاد آورید. از دیدگاه شخصی که در حال چرخش است، بدن و بازوها را در نظر بگیرید. وقتی وزن‌ها به سوی داخل جمع می‌شوند، همه بدن سریع‌تر می‌چرخد، اما ببینید، بخش مرکزی بدن بدون تغییر مانده است، درحالی که همچنان بدن سریع‌تر از قبل در حال چرخش است. بنابراین، اگر می‌توانستیم دایره‌ای حول بخش درونی بدن بکشیم، و تنها به آنچه که درون دایره بود توجه می‌کردیم، می‌دیدیم که تکانه زاویه‌ای آن‌ها تغییر می‌کند، و سریع‌تر می‌چرخند. در نتیجه باید یک گشتاور اعمال شده بر بدن، هنگامی که بازوهایمان را به داخل جمع کرده‌ایم، وجود داشته باشد. اما وقتی نیروی گریز از مرکز وجود دارد نمی‌توان هیچ گشتاوری اعمال کرد، زیرا نیروی گریز از مرکز یک نیروی شعاعی است. به این معنا که در میان نیروهایی که در یک سیستم در حال چرخش شکل می‌گیرند، نیروی گریز از مرکز همه آن چیزی نیست که به وجود آمده است، و داستان این است که نیروی دیگری نیز وجود دارد. این نیروی دیگر را نیروی کریولیس (پیچشی) می‌نامند، و این ویژگی بسیار عجیب را دارد که وقتی چیزی را در یک سیستم چرخشی به حرکت درمی‌آوریم، به نظر می‌رسد که از کناره‌ها به آن فشار وارد می‌شود. درست شبیه نیروی گریز از مرکز، این هم یک نیروی ظاهری است؛ اما اگر ما در یک سیستم در حال چرخش زندگی کنیم، و یک چیزی را به صورت شعاعی حرکت دهیم، درمی‌یابیم که برای اینکه حرکت شعاعیش را حفظ کند باید فشار جانبی بر آن وارد کنیم، این فشار از کناره‌ها که ما مجبوریم بر آن فایق آییم همان چیزی است که باعث چرخش بدن ما می‌شود.

حال بیایید به تشریح فرمولی بپردازیم که نشان می‌دهد نیروی کریولیس واقعاً چگونه کار می‌کند. تصور کنید ماوی بر روی یک چرخ‌وفلک نشسته است و به نظرش چرخ‌وفلک ثابت است؛ اما از منظر جو، که بر روی زمین ایستاده است و قوانین مکانیک را به خوبی می‌داند، چرخ‌وفلک در حال چرخیدن است. فرض کنید یک خط شعاعی روی چرخ‌وفلک کشیده‌ایم، و ماوی دارد یک جرمی را به صورت شعاعی در طول این خط جابه‌جا می‌کند. ما می‌خواهیم نشان دهیم که نیروی جانبی باید برای انجام این کار وجود داشته باشد. می‌توانیم این کار را با توجه به تکانه زاویه‌ای جرم انجام دهیم. چرخ‌وفلک همواره با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد، در نتیجه تکانه زاویه‌ای می‌شود:

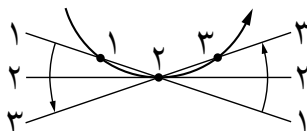
$$L = mv_{\text{tang}}r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2.$$

بنابراین، هنگامی که جرم نزدیک مرکز باشد، به نسبت تکانه زاویه‌ای کوچکی خواهد داشت، اما اگر جسم را به نقطه جدیدی دور از مرکز حرکت دهیم، هرچه r را افزایش دهیم، m ، تکانه زاویه‌ای بیشتری خواهد یافت، در نتیجه برای به حرکت درآوردن جرم در حول شعاع، اعمال می‌شود. (برای حرکت در حول شعاع در یک چرخ و فلک، باید به آن تکیه دهید و فشار جانبی وارد کنید. یک وقت امتحانش کنید.) گشتاور مورد نیاز، میزان تغییرات L در طی زمان است و در این مدت m حول شعاع حرکت می‌کند. اگر m تنها حول شعاع حرکت کند، اُمگا ثابت می‌ماند، در نتیجه گشتاور می‌شود:

$$\tau = F_c r = \frac{dL}{dt} = \frac{(dm\omega r^2)}{dt} = 2m\omega r \frac{dr}{dt},$$

که در آن F_c نیروی کربولیس است. چیزی که ما در واقع می‌خواهیم بدانیم این است که چه نیروی جانبی را ماوی باید اعمال کند تا m را با سرعت $v_r = dr/dt$ به حرکت درآورد. این نیرو برابر است با $F_c = \phi/r = 2m\omega v_r$.

حالا که فرمول نیروی کربولیس به دست آمده است، بیایید کمی دقیق‌تر به شرایط موجود نگاه کنیم، تا ببینیم آیا می‌توانیم منشأ این نیرو را از دیدگاهی ابتدایی‌تر به دست آوریم یا نه. گفتیم که نیروی کربولیس در هر شعاعی یک مقدار ثابت است، و از قرار معلوم حتی در مبدأ هم این نیرو وجود دارد! اتفاقاً درک وجود این نیرو در مبدأ آسان‌تر است، کافیه ببینیم در سیستم لختی که جو، که روی زمین است، در آن قرار دارد، چه اتفاقی می‌افتد. شکل (۴.۱۹) سه حالت پیاپی m را درست در هنگامی که از مبدأ در $t = 0$ عبور می‌کند، نشان می‌دهد. به دلیل چرخش چرخ و فلک، می‌بینیم که m در یک خط راست حرکت نمی‌کند، بلکه در یک مسیر منحنی تاثرات قطر چرخ و فلک رد می‌شود، که در آن $r = 0$. برای اینکه m در یک مسیر منحنی حرکت کند، باید یک نیروی وجود داشته باشد تا به آن در فضای مطلق شتاب بدهد. و این نیرو، نیروی کربولیس است.



۴.۱۹. سه حالت پیاپی از نقطه‌ای که به صورت شعاعی بر روی یک صفحه گردان در حال چرخش

این تنها موردی نیست که در آن نیروی کربولیس وجود دارد. ما می‌توانیم نشان دهیم که اگر جسمی با سرعت ثابت پیرامون یک دایره بچرخد، باز هم نیروی کربولیس وجود دارد. چرا؟ ماوی سرعت v_M را دور دایره مشاهده می‌کند. از سوی دیگر، جو می‌بیند که m با سرعت $v_J = v_M + \omega r$

، جابه‌جا می‌شود، زیرا m هم به وسیله چرخ و فلک حرکت می‌کند. در نتیجه ما می‌دانیم که در واقع این نیرو چیست، یعنی، نیروی مایل به مرکز (مرکز گرا) کلی بنابر سرعت داده شده V_J یا بنابر mv_J^2/r ؛ نیروی واقعی است. حالا از منظر ماوی، این نیروی مایل به مرکز سه جزء دارد و ما می‌توانیم آن را به این شکل بنویسیم:

$$F_r = -\frac{mv_J^2}{r} = -\frac{mv_M^2}{r} - 2mv_M\omega - m\omega^2 r.$$

حال، F_r نیرویی است که ماوی می‌بیند. بیا باید تلاش کنیم تا آن را درک کنیم. آیا ماوی عبارت اول معادله بالا را می‌پذیرد؟ «بله»، ماوی می‌گوید: «حتی اگر من در حال چرخش نبودم و با سرعت v_M حول یک دایره حرکت می‌کردم باز هم نیروی مرکزگرا وجود داشت.» این همان نیروی مرکزگرایی است که ماوی انتظارش را داشت، و هیچ ارتباطی هم با دوران (چرخش) ندارد. از طرفی ماوی می‌داند که نیروی مرکزگرای دیگری نیز وجود دارد که حتی روی اجسامی که روی چرخ و فلک ساکن هستند نیز اعمال می‌شود. این عبارت سوم معادله بالا است. اما اضافه بر این دو عبارت، عبارت دیگری هم وجود دارد یعنی بخش دوم این تساوی که $2m\omega v$ است. نیروی کریولیس F_c یک نیروی مماسی است، هنگامی که سرعت شعاعی باشد، و الان نیروی کریولیس شعاعی است زیرا سرعت مماسی است. در واقع، یک عبارت با یک علامت منفی در تناسب با عبارت دیگر است. نیرو همواره در جهت سرعت است، اینکه سرعت در چه جهتی باشد اهمیتی ندارد. نیرو در راستای سرعت است و بزرگی آن $2m\omega v$ است.