شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 18
درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۱۸
مترجم: مهتاب شفیعی
ویراستار و حروفچین: علی باقری کوچکسرائی، علیرضا غفاری مخملباف
نسخه‌ی ۱.۰ بهار ۱۳۹۹
حلقه‌ی مترجمان ژرفا

www.Zharfa90.ir

این صفحه مخصوصاً خالی گذاشته شده است.

فصل ۱۸

دوران در دو بعد

۱.۱۸ مرکز جرم

در بخش‌های قبلی مکانیک، ذرات نقطه‌ای یا ذرات ریزی را که ساختارهای درونی آنها نگرانمان نمی‌کرد بررسی می‌کردیم. در چند بخش بعدی، قوانین نیوتون را برای چیزهای پیچیده‌تری به‌کار خواهیم گرفت. وقتی جهان پیچیده‌تر می‌شود، قابل‌توجه‌تر هم می‌شود و ما درمی‌یابیم که پدیده‌های مربوط به مکانیک یک شیء پیچیده‌تر از فقط یک نقطه، واقعاً قابل‌توجه هستند. البته این پدیده‌ها با چیزی جز قوانین نیوتون توجیه نمی‌شوند اما گاهی اوقات باور این که فقط $F = ma$ در حال استفاده است دشوار است.

اجسام پیچیده‌تری که با آنها سروکار داریم می‌توانند از انواع متفاوتی باشند. آب، شاره‌ها، چرخش کهکشان‌ها و غیره. درآغاز، ساده‌ترین جسم پیچیده برای بررسی چیزیست که آن را "جسم صلب[۱]" می‌نامیم. جسم جامدی که به هنگام حرکت در حال چرخش است، گرچه حتی چنین جسمی ممکن است پیچیده‌ترین حرکت را داشته باشد؛ درنتیجه ما باید اول ساده‌ترین جنبه‌های چنین حرکتی را در نظر بگیریم که در آن یک جسم مبسوط حول محوری ثابت حرکت می‌کند. نقطه‌ای معین روی چنین جسمی در صفحه‌ای عمود بر این محور ثابت حرکت می‌کند. چنین دورانی از جسم حول محوری ثابت، دوران مسطح[۲] یا دوران در دو بعد نامیده می‌شود. ما بعداً نتایج را به سه بعد تعمیم خواهیم داد اما در انجام این کار درمی‌یابیم که برخلاف وضع مکانیک ذرات معمولی، دوران‌ها مبهمند و درک آنها مشکل است مگر این که ابتدا به عنوان پایه‌ای مستحکم، دوران در دو بعد را درک کنیم.

اولین نکته‌ی قابل توجه مربوط به اجسام پیچیده هنگامی به‌کار می‌آید که جسم پیچیده‌ی تشکیل‌شده از تعداد زیادی بلوک و پره‌هایی که به وسیله‌ی طنابی در کنار هم نگه داشته شده‌اند را در هوا پرتاب می‌کنیم. البته ما می‌دانیم که حرکت این جسم سهموی است زیرا ما آن را برای یک ذره مشاهده کرده‌ایم. اما اکنون جسم ما یک ذره نیست؛ میلرزد، تکان می‌خورد و غیره. با این حال روی یک سهمی حرکت می‌کند که یک شخص می‌تواند آن را ببیند. اما چه چیزی بر روی یک سهمی حرکت می‌کند؟ قطعاً نقطه‌ای که در گوشه‌ی بلوک قرار دارد نیست زیرا آن به هر سو تکان می‌خورد؛ هیچ یک از نقاط انتهایی یک میله‌ی چوبی یا وسط میله‌ی چوبی یا وسط بلوک هم نیست. اما چیزی هست که در یک سهمی حرکت می‌کند. "مرکز مؤثری" وجود دارد که در یک سهمی حرکت می‌کند. سپس نخستین تئوری ما درباره‌ی اجسام پیچیده به ما نشان

---
[1] rigid body
[2] plane rotation

می‌دهد که یک موقعیت میانگین وجود دارد که به صورت ریاضی قابل تعریف است ولی الزاماً خودش جزئی از ماده نیست که این نقطه در یک سهمی حرکت می‌کند. این تئوری، تئوری مرکزجرم نامیده می‌شود و اثبات آن در ادامه آمده است.

ما ممکن است هر جسم را متشکل از بسیاری از ذرات ریز در نظر بگیریم؛ اتم‌ها با نیروهای متنوع بین آنها. فرض کنید i اندیس یا زیروندی باشد که یک ذره را معین می‌کند (میلیون‌ها از آنها وجود دارند پس i تا $۱۰^{۲۳}$ یا چیز دیگری ادامه می‌یابد). سپس نیروی وارد بر i امین ذره حتماً جرم آن ضرب در شتاب آن است:

$$\boldsymbol{F}_i = m_i\left(d^۲\boldsymbol{r}_i/dt^۲\right). \tag{۱.۱۸}$$

در چند بخش بعدی اجسام متحرک ما اجسامی هستند که با سرعتی بسیار کمتر از سرعت نور حرکت می‌کنند و ما تقریب‌های غیرنسبیتی را برای تمامی مقادیر به‌کار خواهیم برد. در این شرایط جرم ثابت است به طوری که :

$$\boldsymbol{F}_i = d^۲\left(m_i\boldsymbol{r}_i\right)/dt^۲. \tag{۲.۱۸}$$

حال اگر ما تمام نیروهای وارد بر تمام ذرات را با هم جمع کنیم یعنی اگر تمامی F_i ها را برای تمامی زیروندها حساب کنیم، نیروی کل F را به دست می‌آوریم و در طرف دیگر معادله به همان چیز می‌رسیم مثل این که قبل از تفکیک آن را جمع کرده‌ایم:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F} = \frac{d^۲\left(\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\right)}{dt^۲}. \tag{۳.۱۸}$$

در نتیجه نیروی کل، جمع تمامی مشتق‌های دوم جرم ضرب در مکانشان است.

حال نیروی کل بر همه‌ی ذرات همان نیروی خارجی است، چرا؟ اگرچه همه نوع نیرو به خاطر ریسمان‌ها، تکان خوردن‌ها، کشش‌ها، هل دادن‌ها و کشیدن‌ها، نیروهای اتمی. و کسی چه می‌داند چه نیروهای دیگری بر ذرات وارد می‌شود و ما باید تمامی اینها را با هم جمع کنیم؛ اما با قانون سوم نیوتون از این کار نجات یافته‌ایم. بین هر دو جسمی عمل و عکس‌العمل برابرند به طوری که زمانی که همه‌ی معادلات را با هم جمع می‌کنیم، اگر نیرویی بین دو جسم وجود داشته باشد، در فرآیند جمع‌کردن نیروها خنثی می‌شود. نتیجه‌ی کلی فقط ناشی از اجزای دیگریست که عضو اجزایی که می‌خواهیم نیروهای بینشان را جمع بزنیم نیستند. پس اگر معادله‌ی (۳.۱۸) جمع روی تعداد مشخصی از ذرات باشد که با هم جسم نامیده می‌شود؛ آنگاه نیروی خارجی روی جسم کلی برابر با تمام نیروهای وارد بر تمام اجزای اصلی جسم است.

حال خوب می‌شود اگر بتوانیم معادله‌ی (۳.۱۸) را به صورت جرم کل ضرب در شتابی بنویسیم، ما می‌توانیم، بیایید فرض کنیم M جمع تمامی اجرام است؛ جرم کل. سپس اگر بردار R را بدین صورت تعریف کنیم:

$$\boldsymbol{R} = \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i/M, \tag{۴.۱۸}$$

معادله‌ی (۳.۱۸) به سادگی خواهد بود:

$$\boldsymbol{F} = d^۲\left(M\boldsymbol{R}\right)/dt^۲ = M\left(d^۲\boldsymbol{R}/dt^۲\right), \tag{۵.۱۸}$$

که در آن جرم ثابت است. بنابراین درمی‌یابیم که در آن نیروی خارجی، جرم کل ضرب در شتاب نقطه‌ای فرضی است که موقعیت آن R است. این نقطه "مرکز جرم جسم[3]" نامیده می‌شود. این نقطه جاییست در "وسط" جسم نوعی r متوسط که r_i های متفاوت وزن دارند یا تناسب مهمی با اجرام دارند.

ما درباره‌ی این تئوری مهم در فصل بعدی با جزئیات بیشتری بحث خواهیم کرد بنابراین سخنانمان را به دو نکته محدود می‌کنیم: نخست این که اگر نیروهای خارجی صفر باشند و جسم در فضای خالی شناور باشد ممکن است بچرخد، تکان بخورد، دوران کند یا هر حرکت دیگری داشته باشد ولی مرکز جرم که بطور مصنوعی پدید آمده، مکانش محاسبه شده و جایی در وسط، با سرعت ثابتی حرکت خواهد کرد. به طور خاص اگر ساکن است، ساکن باقی خواهد ماند پس اگر نوعی جعبه داشته باشیم مثلاً یک سفینه‌ی فضایی، با اشخاصی در آن، ما مرکز جرم آن را محاسبه می‌کنیم و درمی‌یابیم که هنوز ثابت است؛ آنگاه در صورتی که هیچ نیروی خارجی‌ای بر جسم اثر نکند مرکز جرم به ثابت بودن ادامه می‌دهد. البته سفینه‌ی فضایی ممکن است به مقدار اندکی در فضا تکان بخورد اما این بدین خاطر است که اشخاص درون آن در حال رفت و آمد هستند و وقتی شخصی به جلو حرکت می‌کند سفینه به عقب حرکت می‌کند که مکان مرکز جرم را دقیقا در همان مکان قبلی نگه دارد.

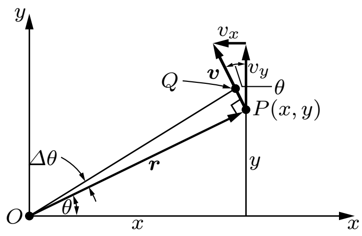
آیا حرکت به جلو توسط پیشرانه موشکی بطور قطع غیرممکن است چراکه یک نفر نمی‌تواند مرکز جرم را جابه‌جا کند؟ نه، ولی البته در می‌یابیم که برای حرکت دادن یک بخش موردنظر باید بخشی غیرضروری دور انداخته شود. به بیانی دیگر اگر با یک موشک با سرعت صفر شروع کنیم و مقداری گاز را از انتهای آن به بیرون پرتاب کنیم، آنگاه هر کجا که این توده‌ی گاز برود، موشک خلاف جهت آن حرکت می‌کند ولی مرکز جرم دقیقاً همان جایی قرار دارد که قبلاً بود، پس ما به سادگی قسمتی را که مورد نظرمان است، خلاف قسمت غیرضروری به حرکت درمی‌آوریم.

نکته‌ی دوم درباره‌ی مرکز جرم که همان دلیل ما برای بحث درباره‌ی آن در این زمان است این است که امکان دارد مرکز جرم به طور جداگانه با حرکات "داخلی" سروکار داشته باشد و درنتیجه امکان نادیده گرفته شدن آن در بحث دوران وجود دارد.

۲.۱۸ دوران جسم صلب

حال بیایید درباره‌ی دوران‌ها بحث کنیم. قطعاً یک جسم معمولی به سادگی دوران نمی‌کند، می‌جنبد، می‌لرزد و خم می‌شود. بنابراین برای ساده‌سازی موضوعات باید درباره‌ی یک جسم فرضی ایده‌آل بحث کنیم که آن را جسم صلب می‌نامیم. که بدین معناست: جسمی که در آن نیروهای بین اتم‌ها بسیار قوی هستند و از گونه‌ای که نیروهایی کوچک که برای حرکتش مورد نیازند آن را خم نمی‌کنند. شکل آن در هنگام حرکت ضرورتاً به همان شکل باقی می‌ماند. اگر بخواهیم حرکت چنین جسمی را مطالعه کنیم و توافق کنیم که حرکت مرکزجرم را نادیده بگیریم فقط یک کار دیگر مانده است که انجام دهیم و آن چرخش است. ما باید آن را توصیف کنیم. چگونه؟ فرض کنید تعدادی خط در جسم وجود دارند که مستقر باقی می‌مانند (شاید شامل مرکزجرم باشند و شاید نباشند) و جسم در حال گردش حول یکی از این خطوط خاص به عنوان یک محور است. دوران را چه تعریف می‌کنیم؟ به اندازه‌ی کافی آسان است چراکه اگر ما نقطه‌ای را روی جسم

[3] center of mass



شکل ۱.۱۸: سینماتیک چرخش دو بعدی.

نشانه‌دار کنیم، هرجایی به جز روی محور ما همیشه می‌توانیم بگوییم که جسم دقیقاً کجاست اگر فقط بدانیم که آن نقطه کجا رفته است. تنها چیز مورد نیاز برای شرح‌دادن مکان آن نقطه یک زاویه است. بنابراین دوران شامل مطالعه‌ی این زاویه با زمان است.

برای مطالعه‌ی دوران ما زاویه‌ای را که یک جسم از ابتدا تا انتها چرخیده مشاهده می‌کنیم. البته ما قطعاً به هیچ زاویه‌ی خاصی داخل جسم اشاره نمی‌کنیم؛ این گونه نیست که ما زاویه‌ی خاصی را روی جسم بکشیم. ما در حال صحبت پیرامون تغییر چرخشی موقعیت کل جسم از یک زمان به زمان دیگر هستیم.

ابتدا بیایید سینماتیک دوران را مطالعه کنیم؛ زاویه با زمان تغییر خواهد کرد و فقط همان طور که درباره‌ی مکان و سرعت در یک بعد صحبت کردیم، ممکن است درباره‌ی مکان زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای[۴] در دوران مسطح صحبت کنیم. قطعاً رابطه‌ی بسیار جذابی بین دوران در دو بعد و جابه‌جایی یک بعدی وجود دارد که تقریباً هر کمیت نظیرش را دارد. ابتدا ما زاویه‌ی θ را داریم که نشان می‌دهد جسم چقدر چرخیده است؛ این فاصله‌ی y را که نشان می‌دهد چقدر جسم مستقیم حرکت می‌کند، عوض می‌کند. در حالت مشابه ما سرعت چرخش را داریم $\omega = d\theta/dt$ که به ما می‌گوید زاویه چه مقدار در ثانیه تغییر می‌کند؛ همان طور که $v = ds/dt$ شرح می‌دهد که یک جسم چقدر سریع حرکت می‌کند. اگر زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه سرعت زاویه‌ای چیزی برحسب رادیان بر ثانیه خواهد بود. هرچه سرعت زاویه‌ای بزرگ‌تر باشد، جسم سریع‌تر در حال چرخش است و زاویه سریع‌تر تغییر می‌کند. می‌توانیم ادامه دهیم؛ می‌توانیم سرعت زاویه‌ای را نسبت به زمان تغییر بدهیم و شتاب زاویه‌ای را $\alpha = d\omega/dt = d^{2}\theta/dt^{2}$ بنامیم که نظیر شتاب معمولی خواهد بود.

حالا قطعاً باید دینامیک دوران را به دینامیک ذرات که جسم از آنها ساخته شده است پیوند دهیم؛ بنابراین باید بفهمیم یک ذره‌ی خاص وقتی که سرعت زاویه‌ای فلان است چگونه حرکت می‌کند. برای انجام این کار بیایید ذره‌ی مشخصی را که در فاصله‌ای از محور واقع شده در نظر بگیریم و بگوییم که در حالت معمولی در موقعیت مشخص $P\,(x,y)$ در لحظه‌ی داده شده است. (شکل ۱.۱۸) اگر در لحظه‌ی Δt بعد کل جسم به اندازه‌ی $\Delta\theta$ چرخیده باشد آنگاه این ذره با آن حمل می‌شود. این در همان فاصله‌ی شعاعی از O است که قبلاً بوده، ولی به Q برده شده است. نخستین چیزی که مایلیم بدانیم این است که فاصله‌ی x چقدر تغییر می‌کند و فاصله‌ی y چقدر تغییر می‌کند. اگر OP ، r نامیده شود آنگاه طول PQ به دلیل شیوه‌ای که زوایا تعریف شده‌اند، برابر است با $r\Delta\theta$ ؛ تغییر در x به سادگی برابر است با تصویر $r\Delta\theta$ در راستای محور x :

$$\Delta x = -PQ\sin\theta = -r\,\Delta\theta\cdot(y/r) = -y\,\Delta\theta. \qquad (۶.۱۸)$$

به طریق مشابه:

[۴] angular velocity

$$\Delta y = +x\,\Delta\theta. \tag{۷.۱۸}$$

اگر جسم در حال چرخش با سرعت زاویه‌ای ω باشد با تقسیم کردن دو طرف (۶.۱۸) و (۷.۱۸) بر Δt درمی‌یابیم که سرعت ذره برابر است با:

$$v_x = -\omega y \qquad \text{and} \qquad v_y = +\omega x. \tag{۸.۱۸}$$

البته اگر بخواهیم اندازه‌ی سرعت را بیابیم فقط می‌نویسیم:

$$v = \sqrt{v_x^۲ + v_y^۲} = \sqrt{\omega^۲ y^۲ + \omega^۲ x^۲} = \omega\sqrt{x^۲ + y^۲} = \omega r. \tag{۹.۱۸}$$

این نباید مرموز باشد که مقدار این سرعت ωr است؛ درواقع این باید بدیهی باشد، به این خاطر که فاصله‌ای که می‌پیماید برابر با $r\Delta\theta$ است و فاصله‌ای که در هر ثانیه طی می‌کند $r\Delta\theta/\Delta t$ است یا $r\omega$.

بیایید حالا به دینامیک دوران بپردازیم. در اینجا یک مفهوم جدید نیرو باید معرفی شود. بیایید تحقیق کنیم که آیا می‌توانیم چیزی را ابداع کنیم که آن را گشتاور[۵] بنامیم .L) torquere، چرخش) که رابطه‌ای مانند رابطه‌ای که نیرو در حرکت خطی دارد، با دوران داشته باشد. یک نیرو چیزیست که برای به وجود آوردن یک حرکت خطی مورد نیاز است. و چیزی که جسمی را وادار به چرخش می‌کند، "نیروی پیچش[۶]" یا "نیروی چرخشی[۷]" است. برای مثال یک پیچش. یک پیچش از لحاظ کیفی یک "چرخش[۸]" است. پیچش از لحاظ کمی چیست؟ ما باید به نظریه‌ی پیچش‌ها به صورت کمی بپردازیم. با مطالعه‌ی کار انجام شده در چرخاندن جسم. چراکه یک راه بسیار خوب برای تعریف نیرو این است که بگوییم زمانی که به مقدار معینی جابه‌جا می‌شود چه مقدار کار انجام می‌شود؟ ما می‌خواهیم بین کمیت‌های خطی و زاویه‌ای همانندی برقرار کنیم؛ با معادل سازی، کاری که ما برای کمی چرخاندن یک جسم انجام می‌دهیم؛ هنگامی که نیروهایی بر آن اثر می‌کنند، برابر است با ضرب گشتاور در زاویه‌ای که جسم می‌چرخد. به عبارت دیگر تعریف گشتاور بسیار سازمان یافته خواهد بود به طوری که تئوری کار نظیر مشخصی داشته باشد: نیرو ضرب در جابه‌جایی مساویست با کار؛ و گشتاور ضرب در زاویه هم برابر با کار خواهد بود. که به ما می‌گوید گشتاور چیست. برای مثال یک جسم صلب را که نیروهای متعددی بر آن اثر می‌کنند و یک محور را که جسم حول آن دوران می‌کند در نظر بگیرید. بیایید در ابتدا روی یک نیرو تمرکز کنیم و فرض کنید که این نیرو در یک نقطه‌ی مشخص (x, y) اعمال شده است. چقدر کار انجام خواهد شد اگر ما جسمی را به اندازه‌ی زاویه‌ی بسیار کوچکی بچرخانیم؟ ساده است. کار انجام شده برابر است با:

$$\Delta W = F_x\,\Delta x + F_y\,\Delta y. \tag{۱۰.۱۸}$$

ما فقط نیاز داریم که روابط (۶.۱۸) و (۷.۱۸) را در Δx و Δy جایگزین کنیم تا به دست آوریم:

$$\Delta W = (xF_y - yF_x)\,\Delta\theta. \tag{۱۱.۱۸}$$

مقدار کاری که انجام داده‌ایم در اصل برابر با زاویه‌ای است که جسم را چرخانده‌ایم ضرب در یک ترکیب به نظر عجیب از نیرو و فاصله. این "ترکیب عجیب" چیزیست که آن را گشتاور می‌نامیم بنابراین با تغییر تعریف

[5] torque
[6] rotary force
[7] twisting force
[8] twist

کار به صورت گشتاور ضرب در زاویه حال ما یک فرمول برای گشتاور برحسب نیروها داریم. (بدیهی است که گشتاور یک ایده‌ی کاملاً جدید مستقل از مکانیک نیوتونی نیست؛ گشتاور باید یک مفهوم مشخص برحسب نیرو باشد).

وقتی نیروهای متعددی اثر گذارند؛ کاری که انجام شده است، مجموع کارهای انجام شده توسط همه‌ی نیروهاست، بطوری که ΔW جمع کامل سهم‌های تمامی نیروها با هم است که هرکدام با $\Delta\theta$ متناسب‌اند. می‌توانیم $\Delta\theta$ را خارج بگیریم و در نتیجه می‌توانیم بگوییم که تغییر در کار برابر است با جمع همه‌ی گشتاورهای ناشی از همه‌ی نیروهایی که در حال اثر کردن هستند، ضرب در $\Delta\theta$. این مجموع را ممکن است گشتاور کلی(τ) بنامیم. بنابراین گشتاورها با قوانین معمولی جبری با هم جمع می‌شوند. اما ما بعداً حتماً خواهیم دید که این به این خاطر است که ما در صفحه کار می‌کنیم. این مانند سینماتیک یک بعدی است که نیروها به سادگی طبق قوانین جبری جمع می‌شوند، ولی فقط به این خاطر که آنها در جهت مشابهی هستند. این در سه بعد بسیار پیچیده‌تر است. بنابراین برای دوران دو بعدی داریم:

$$\tau_i = x_iF_{yi} - y_iF_{xi} \tag{۱۲.۱۸}$$

و

$$\tau = \sum \tau_i. \tag{۱۳.۱۸}$$

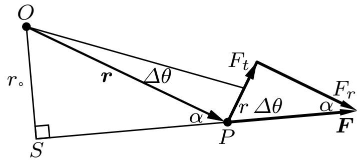
این باید مؤکد باشد که گشتاور حول محور معینی است. اگر محور متفاوتی انتخاب شده باشد به طوری که همه‌ی x_i ها و y_i ها تغییر کرده باشند، (معمولاً) اندازه‌ی گشتاور نیز تغییر می‌کند.

اکنون ما به طور خلاصه توقف می‌کنیم تا ذکر کنیم که تعریف قبلی ما از گشتاور از طریق ایده‌ی کار، به ما مهم‌ترین نتیجه را برای جسم در حال تعادل می‌دهد: اگر همه‌ی نیروهای یک جسم در حال تعادل باشند برای حرکت انتقالی و دورانی، هر دو، نه تنها نیروی برآیند[9] صفر است بلکه جمع تمامی گشتاورها هم صفر است. چون اگر یک جسم در حال تعادل باشد هیچ کاری توسط نیروها برای جابه‌جایی کوچک انجام نمی‌شود، در نتیجه تا زمانی که $\Delta W = \tau\Delta\theta = 0$ ، جمع همه‌ی گشتاورها باید صفر باشد. بنابراین دو شرط برای تعادل وجود دارند: جمع همه‌ی نیروها صفر باشد و جمع همه‌ی گشتاورها صفر باشد. ثابت کنید این کافیست برای این که مطمئن باشیم که جمع گشتاورها حول هر محوری در دو بعد صفر است.

حال بیایید یک تک نیرو را در نظر بگیریم و تلاش کنیم که از لحاظ هندسی درک کنیم که این عبارت عجیب xF_yyF_x نمایانگر چه چیزیست. در شکل ۲.۱۸ یک نیرو F در نقطه‌ی r بر جسم اثر می‌کند وقتی جسم تحت زاویه‌ی کوچک $\Delta\theta$ چرخانده شده است کار انجام شده برابر است با مؤلفه‌ی نیرو در جهت جابه‌جایی ضرب در جابه‌جایی. به عبارت دیگر فقط مؤلفه‌ی مماسی نیروست که به حساب می‌آید و این باید در جابه‌جایی $r\Delta\theta$ ضرب شود. در نتیجه ملاحظه می‌کنیم که گشتاور هم چنین مساویست با مؤلفه‌ی مماسی نیرو (عمود بر شعاع) ضرب در شعاع. این با توجه به شرایط ایده‌ی معمولی ما برای گشتاور قابل درک است چراکه اگر نیرو کاملاً افقی بود هیچ ”چرخشی“ در جسم ایجاد نمی‌کرد؛ این بدیهی است که اثر چرخش باید فقط بخشی از نیرو را که از مرکز خارج نشده، درگیر کند و این به معنای همان مؤلفه‌ی مماسی است. علاوه بر این آشکار است که یک نیروی معین بر روی بازوی بلند تأثیرگذارتر از نزدیک محور است. درواقع اگر ما مسئله را جایی در نظر بگیریم که ما دقیقاً روی محور نیرو وارد می‌کنیم، ما اصلاً در حال

[9]net force

چرخاندن آن نیستیم! پس این قابل درک است که مقدار چرخش با گشتاور متناسب است با هر دو فاصله‌ی شعاعی و مؤلفه‌ی مماسی نیرو.



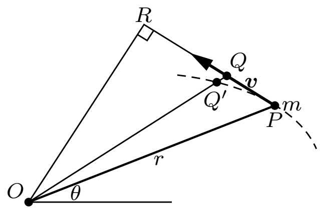
شکل ۲.۱۸: گشتاور تولیدشده توسط یک نیرو.

هنوز فرمول سومی برای گشتاور وجود دارد که بسیار قابل توجه است. تاکنون دیدیم که گشتاور برابر است با نیرو ضرب در جابه‌جایی ضرب در سینوس زاویه‌ی α در شکل ۲.۱۸. ولی اگر ما خط اثر نیرو را گسترش دهیم و OS را بکشیم؛ فاصله‌ی قائم تا خط اثر نیرو (بازوی اهرم نیرو[۱۰]) متوجه می‌شویم که این بازوی اهرمی کوتاه‌تر از r است به همان نسبتی که بخش مماسی نیرو کوچکتر از نیروی کل است. در نتیجه فرمول گشتاور می‌تواند به صورت مقدار نیرو ضرب در اندازه‌ی بازوی اهرمی نوشته شود.

گشتاور همچنین اغلب ممان نیرو هم نامیده می‌شود. اساس این نامیدن مبهم است اما ممکن است مربوط به این واقعیت باشد که "ممان[۱۱]" مشتق کلمه‌ی لاتین *movimentum* است و اینکه توانایی نیرو برای تکان‌دادن یک جسم (با استفاده از اهرم یا دیلم) با افزایش طول بازوی اهرمی افزایش می‌یابد. در ریاضیات "ممان" به این معناست که سنگینی‌اش با توجه به فاصله از محور چقدر است.

۳.۱۸ تکانه‌ی زاویه‌ای

هرچند ما تاکنون فقط به مسئله‌ی خاص جسم صلب توجه کردیم، خواص گشتاورها و روابط ریاضی آنها قابل توجهند؛ حتی وقتی که جسم صلب هم نباشد. درواقع ما می‌توانیم یک تئوری بسیار قابل توجه را اثبات کنیم. همان گونه که نیروی خارجی همان آهنگ تغییر کمیت p است که ما آن را تکانه‌ی مجموعه‌ای از ذرات می‌نامیدیم؛ گشتاور خارجی آهنگ تغییر کمیت L است که ما آن را تکانه‌ی زاویه‌ای مجموعه‌ای از ذرات می‌نامیم.



شکل ۳.۱۸: یک ذره حول یک محور O حرکت می‌کند.

برای اثبات این باید فرض کنیم که سیستمی از ذرات وجود دارد که تعدادی نیرو در حال اثر بر آن هستند و دریابیم که چه اتفاقی برای سیستم از گشتاورهای ناشی از این نیروها می‌افتد. البته ابتدا باید فقط یک ذره را در نظر بگیریم؛ در شکل ۳.۱۸ یک ذره با جرم m و یک محور O وجود دارد؛ ذره لزوماً در حال

[10] lever arm
[11] moment

چرخش در یک دایره حول O نیست، ممکن است در حال چرخش در یک بیضی باشد مانند یک سیاره که دور خورشید می‌چرخد یا روی خم دیگری. این به نوعی در حال حرکت است و نیروهایی بر آن اثر می‌کنند و طبق فرمول عادی که مؤلفه‌ی در راستای x برابر است با جرم ضرب در مؤلفه‌ی x شتاب و غیره، شتاب می‌گیرد. اما بیایید ببینیم گشتاور چه می‌کند. گشتاور برابر است با $xF_y - yF_x$ و نیروی در راستای x یا y برابر است با جرم ضرب در شتاب در راستای x یا y :

$$\begin{aligned}\tau &= xF_y - yF_x = \\ &= xm\left(d^2y/dt^2\right) - ym\left(d^2x/dt^2\right).\end{aligned} \tag{۱۴.۱۸}$$

حال اگرچه به نظر نمی‌رسد که این عبارت مشتق کمیت ساده‌ای باشد ولی درواقع مشتق کمیت $xm\left(dy/dt\right) ym\left(dx/dt\right)$ است:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[xm\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) - ym\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\right] &= xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)m\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\ &-ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right).\end{aligned} \tag{۱۵.۱۸}$$

بنابراین این درست است که گشتاور، آهنگ تغییر چیزی با زمان است پس ما به "چیزی" توجه می‌کنیم آن را نامگذاری می‌کنیم: آن را L می‌نامیم، تکانه‌ی زاویه‌ای:

$$\begin{aligned}L &= xm\left(dy/dt\right) - ym\left(dx/dt\right) \\ &= xp_y - yp_x.\end{aligned} \tag{۱۶.۱۸}$$

گرچه بحث کنونی ما غیرنسبیتی است، شکل دوم برای L داده شده در بالا به صورت نسبیتی هم درست است؛ پس ما دریافته‌ایم که یک نظیر چرخشی برای تکانه هم وجود دارد و این نظیر تکانه‌ی زاویه‌ای با عبارتی برحسب مؤلفه‌های تکانه‌ی خطی داده شده که دقیقاً شبیه فرمول گشتاور برحسب مؤلفه‌های نیرو است! بنابراین اگر ما بخواهیم تکانه زاویه‌ای یک ذره را حول یک محور بدانیم، فقط مؤلفه‌ی مماسی تکانه را در نظر می‌گیریم و آن را در شعاع ضرب می‌کنیم؛ به عبارت دیگر چیزی که تکانه زاویه‌ای به حساب می‌آید این نیست که چقدر سریع از مرکز در حال دور شدن است بلکه چه مقدار حول مرکز در حال چرخش است. تنها بخش مماسی تکانه برای تکانه زاویه‌ای به حساب می‌آید. علاوه بر این هرچه خط تکانه گسترده‌تر شود، تکانه زاویه‌ای بزرگتر می‌شود و همچنین چون اصول هندسه وقتی یک کمیت P نامیده شود یا F تفاوتی نمی‌کند، صحیح است که بگوییم یک بازوی اهرمی وجود دارد (نه همان بازوی اهرمی نیروی وارد بر ذره!) که با گسترش دادن خط تکانه و یافتن فاصله‌ی قائم تا محور به دست می‌آید. درنتیجه تکانه زاویه‌ای برابر است با اندازه‌ی تکانه ضرب در بازوی اهرمی تکانه. پس ما سه فرمول برای تکانه زاویه‌ای داریم همان گونه که سه فرمول برای گشتاور داشتیم:

$$\begin{aligned}L &= xp_y - yp_x \\ &= rp_{\text{tang}} \\ &= p \cdot \text{بازوی اهرم}.\end{aligned} \tag{۱۷.۱۸}$$

تکانه زاویه‌ای هم مانند گشتاور به مکان محوری که محاسبات حول آن انجام می‌شوند بستگی دارد.

قبل از اقدام به عمل برای بیش از یک ذره بیایید نتایج بالا را روی یک سیاره که حول خورشید می‌گردد اعمال کنیم. نیرو به کدام سو است؟ نیرو به سمت خورشید است. گشتاور روی جسم چیست؟ قطعاً این بستگی به این دارد که محور را کجا در نظر بگیریم. گشتاور نیرو ضرب در بازوی اهرمی یا مؤلفه‌ی قائم بر r نیرو ضرب در r است. ولی هیچ نیروی مماسی‌ای وجود ندارد پس هیچ گشتاوری حول یک محور گذرنده از خورشید وجود ندارد! در نتیجه تکانه زاویه‌ای سیاره‌ی در حال گردش به دور خورشید باید ثابت بماند. بیایید ببینیم این به چه معناست. مؤلفه‌ی مماسی سرعت ضرب در جرم ضرب در شعاع، ثابت خواهد بود چون این همان تکانه زاویه‌ای است و آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای گشتاور است و در این مسئله گشتاور برابر با صفر است؛ البته تا زمانی که جرم هم ثابت باشد. این بدین معناست که سرعت مماسی ضرب در شعاع ثابت است ولی این چیزیست که ما برای حرکت یک سیاره فهمیدیم مقدار زمان کوچک Δt را در نظر بگیرید؛ سیاره وقتی از P به Q جابه‌جا می‌شود چقدر حرکت می‌کند (شکل ۳.۱۸)؟ چه مساحتی را جاروب می‌کند؟ بدون در نظر گرفتن مساحت بسیار کوچک $QQ'P$ در مقایسه با مساحت بسیار بزرگتر OPQ به سادگی مساحت برابر است با PQ ضرب در ارتفاع یا همان OR . به عبارت دیگر مساحت جاروب شده در واحد زمان برابر با سرعت ضرب در بازوی اهرمی سرعت (ضرب در ۱/۵) خواهد بود. بنابراین آهنگ تغییر مساحت متناسب با تکانه زاویه‌ای است که ثابت است. در نتیجه قانون مساحت‌های مساوی در زمان‌های مساوی کپلر یک توصیف لغوی از عبارت قانون بقای تکانه زاویه‌ای است، زمانی که هیچ گشتاوری توسط نیرو ایجاد نشده باشد.

۴.۱۸ بقای تکانه زاویه‌ای

حال ما باید فکر کنیم هنگامی که تعداد زیادی از ذرات وجود دارند چه اتفاقی می‌افتد وقتی یک جسم از بخش‌های زیادی با نیروهای زیادی بین آنها و وارد بر آنها از بیرون ساخته شده است. البته ما می‌دانیم که حول هر محور ثابت معینی گشتاور روی i امین ذره (که هست نیروی وارد بر i امین ذره ضرب در بازوی اهرمی آن نیرو) برابر است با آهنگ تغییرات تکانه زاویه‌ای آن ذره و این که تکانه زاویه‌ای i امین ذره برابر است با تکانه‌اش ضرب در بازوی اهرمی تکانه. حال فرض کنید گشتاورها τ_i های همه‌ی ذرات را با هم جمع کنیم و آن را گشتاور کل τ بنامیم. سپس این گشتاور برابر خواهد بود با آهنگ تغییر مجموع تکانه زاویه‌ای‌های تمام ذرات L_i ها و آن کمیت جدیدی را که ما تکانه زاویه‌ای کل می‌نامیم L . دقیقا همان طور که تکانه‌ی کلی یک جسم جمع تکانه زاویه‌ای‌های تمام اجزاست. آن گاه آهنگ تغییر L کلی گشتاور کلی است:

$$\tau = \sum \tau_i = \sum \frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}. \qquad (۱۸.۱۸)$$

حال ممکن است به نظر برسد که گشتاور کلی چیز پیچیده‌ای است. همه‌ی آن نیروهای داخلی و همه‌ی نیروهای خارجی باید در نظر گرفته شوند. ولی ما از قاتون عمل و عکس‌العمل نیوتون استفاده می‌کنیم تا به سادگی بگوییم نه تنها عمل و عکس‌العمل برابرند بلکه آنها قطعاً در راستای هم و در جهت مخالف قرار دارند. (نیوتون ممکن است این را نگفته باشد ولی او به طور ضمنی این را گفته است). سپس دو گشتاور روی اجسام واکنش‌گر ناشی از تعامل متقابلشان برابر و مخالف هم خواهند بود، چون بازوی اهرمی برای

هر محور با هم برابرند. بنابراین گشتاورهای داخلی دو به دو به توازن می‌رسند و در نتیجه ما نظریه‌ی قابل توجهی داریم که آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای کل حول هر محور برابر با گشتاور خارجی حول همان محور است!

$$\tau = \sum \tau_i = \tau_{\text{ext}} = dL/dt. \tag{۱۹.۱۸}$$

در نتیجه ما یک نظریه‌ی بسیار قوی درباره‌ی حرکت مجموعه‌های بزرگ ذرات داریم که به ما اجازه می‌دهد که حرکت فراگیرنده‌ای را بدون این که مجبور باشیم به جزئیات درون تشکیلات نگاه بیندازیم، مطالعه کنیم. این تئوری برای هر مجموعه‌ای از اجسام خواه یک جسم صلب را تشکیل بدهند یا خیر، صحیح است.

یک موضوع بسیار مهم برگرفته از تئوری بالا قانون پایستگی تکانه زاویه‌ای است، اگر هیچ گشتاوری بر یک سیستم ذرات اثر نکند تکانه زاویه‌ای ثابت باقی می‌ماند.

یک مسئله‌ی خاص که بسیار حائز اهمیت است درباره‌ی یک جسم صلب است که جسمی است که شکل معینی دارد و در حال چرخش است. یک جسم را در نظر بگیرید که ابعاد هندسی ثابتی دارد و در حال چرخش حول یک محور ثابت است. بخش‌های مختلف یک جسم روابط مشابهی را با هم در همه‌ی زمان‌ها دارند. حال بیایید تلاش کنیم تکانه زاویه‌ای این جسم را پیدا کنیم. اگر جرم یکی از اجزایش m_i باشد و مکان یا موقعیتش (x_i, y_i) ، آنگاه مسئله این است که تکانه زاویه‌ای آن جزء را پیدا کنیم؛ چون تکانه زاویه‌ای کل برابر است با جمع تکانه زاویه‌ای‌های تمام این اجزا در جسم. برای یک جسم که در حال چرخش در یک دایره است تکانه زاویه‌ای قطعاً جرم ضرب در سرعت ضرب در فاصله‌اش از محور است و سرعت نیز برابر است با سرعت زاویه‌ای ضرب در فاصله از محور:

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^{۲} \omega, \tag{۲۰.۱۸}$$

یا با جمع بستن همه‌ی اجزاء i ها به دست می‌آوریم:

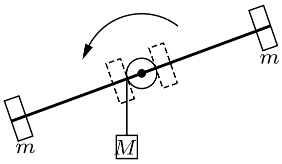
$$L = I\omega, \tag{۲۱.۱۸}$$

که

$$I = \sum_i m_i r_i^{۲}. \tag{۲۲.۱۸}$$

این نظیر قانونیست که تکانه برابر است با جرم ضرب در سرعت. سرعت با سرعت زاویه‌ای جایگزین شده و می‌بینیم که جرم با چیزی جدید که آن را لختی دورانی[۱۲] I می‌نامیم، جایگزین گشته است که نظیر جرم است. معادلات (۲۱.۱۸) و (۲۲.۱۸) می‌گویند که در یک جسم برای چرخش، لختی یا اینرسی وجود دارد که نه تنها بر جرم‌ها بلکه به این که چه مقدار از محور فاصله دارند هم بستگی دارد. بنابراین اگر دو جسم با جرم مشابه داشته باشیم زمانی که ما جسم‌ها را از محور دورتر می‌کنیم، لختی دورانی بیشتر می‌شود به این سادگی دستگاه داده شده در شکل ۴.۱۸ نشان داده می‌شود؛ جایی که وزنه‌ی M از افتادن خیلی سریع نگه داشته شده است، چون مجبور است میله‌ی بزرگ سنگین را بچرخاند. در ابتدا جرم‌های m نزدیک به محورند و M با آهنگ مشخصی سرعت می‌گیرد. و زمانی که لختی دورانی را با گذاشتن دو جرم m در فاصله بسیار دورتر از محور تغییر می‌دهیم آنگاه می‌بینیم که جسم M با سرعت کمتری از قبل شتاب می‌گیرد چون جسم لختی بیشتری در برابر چرخش دارد. لختی دورانی اینرسی مخالف با چرخش است جمع سهم همه‌ی جرم‌ها است ضرب در مجذور فاصله‌شان از محور.

[12] moment of inertia



شکل ۴.۱۸: "اینرسی برای چرخش" به بازوی اهرم اجرام بستگی دارد.

یک تفاوت مهم بین جرم و لختی دورانی که بسیار مهیج است این است که جرم یک جسم هیچ گاه تغییر نمی‌کند ولی لختی دورانی آن می‌تواند تغییر کند. اگر ما روی یک جایگاه بدون اصطکاک قابل چرخش بایستیم در حالی که دستانمان را باز نگه داشته‌ایم و وزنه‌ای را در دستانمان همان گونه که آرام می‌چرخیم نگه داریم، ممکن است اگر بازوانمان را به سمت بدنمان بیاوریم، مشاهده کنیم لختی دورانی‌مان تغییر می‌کند؛ اما جرم تغییر نمی‌کند وقتی این کار را انجام می‌دهیم، همه نوع چیز فوق‌العاده اتفاق می‌افتد. اگر گشتاور خارجی صفر باشد آن گاه تکانه زاویه‌ای لختی دورانی ضرب در ω ثابت می‌ماند. در آغاز ما در حال چرخش با لختی دورانی بزرگی بودیم $I_۱$ و تکانه زاویه‌ای $I_۱\omega_۱$ بود. سپس لختی دورانی‌مان را با کشیدن بازوانمان به سمت داخل به مقدار کوچکتر $I_۲$ تغییر دادیم. سپس $I\omega$ ی به وجود آمده که باید به دلیل بقای تکانه زاویه‌ای ثابت بماند، $I_۲\omega_۲$ بود. بنابراین $I_۱\omega_۱ = I_۲\omega_۲$. این یعنی اگر لختی دورانی را کاهش دهیم باید سرعت زاویه‌ای را افزایش دهیم.