

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 13

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۱۳

مترجم: نوید علی‌اکبریان

ویراستار و حروف‌چین: یاسمین مدبر، علی باقری کوچکسرائی

نسخه‌ی ۱۰۰ تابستان ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

www.Zharfa90.ir

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۱۳

کار و انرژی پتانسیل^۱ (۱)

۱.۱۳ انرژی جسم در حال سقوط

در فصل ۴ به تفصیل درباره‌ی بقای انرژی^۲ صحبت کردیم؛ هرچند در صحبت‌های خود از قوانین نیوتون بهره‌ای نبردیم. با این حال چگونگی تطابق بقای انرژی با قوانین نیوتون می‌تواند بسیار جذاب باشد. برای توضیح این امر از ساده‌ترین مثال ممکن شروع کرده و سپس به مسائل پیچیده‌تر خواهیم پرداخت. ساده‌ترین مثال بقای انرژی، سقوط آزاد جسمی است که فقط در راستای عمود حرکت می‌کند. این جسم تنها در اثر گرانش ارتفاع خود را تغییر می‌دهد و به سبب این حرکت، دارای انرژی جنبشی^۳ T (یا (K.E. است. این جسم همچنین دارای انرژی پتانسیل mgh ، به اختصار U (یا (P.E.، است؛ به صورتی که مجموع این دو، همواره مقداری ثابت خواهد بود:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{const},$$

K.E. P.E.

یا

$$T + U = \text{const}. \quad (1.13)$$

اکنون می‌خواهیم صحت این گزاره را اثبات کنیم. منظور از اثبات چیست؟ بنابر قانون دوم نیوتون، ما به آسانی می‌توانیم حرکت اجسام را توصیف کنیم و بستگی سرعت آن‌ها به زمان را مورد بررسی قرار دهیم. سرعت به صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد و ارتفاع طی شده با مربع زمان متناسب است. فلذا اگر در اندازه‌گیری خود، محل سکون جسم را مبدأ فرض کنیم، دور از ذهن نخواهد بود که ارتفاع جسم برابر با حاصل ضرب مجذور سرعت در تعدادی از ثوابت باشد؛ اما بیایید قدری دقیق‌تر بنگریم.

بگذارید مستقیماً از قانون دوم نیوتون به چگونگی تغییرات انرژی جنبشی پی ببریم. ابتدا از انرژی جنبشی نسبت به زمان مشتق گرفته و سپس قوانین نیوتون را دخیل می‌کنیم. اگر از $\frac{1}{2}mv^2$ نسبت به زمان مشتق‌گیری کنیم خواهیم داشت

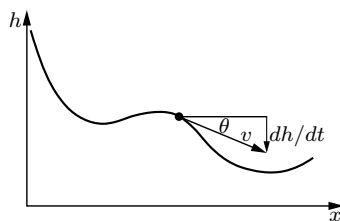
$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (v^2) = mv \frac{dv}{dt}, \quad (2.13)$$

¹Work and Potential Energy

³Kinetic Energy

²Conservation of Energy

فصل ۱۳. کار و انرژی پتانسیل (۱)



۱.۱۳. جسمی در حال حرکت بر روی سطح بدون اصطکاک در اثر گرانش.

زیرا m ثابت فرض شده است. طبق قانون دوم نیوتن می‌دانیم $m(dv/dt) = F$ ، بنابراین

$$dT/dt = Fv. \quad (۳.۱۳)$$

در حالت کلی این عبارت به صورت $F \cdot v$ خواهد بود، لکن در این مسأله‌ی تک‌بُعدی آن را به صورت ضرب نیرو در سرعت در نظر می‌گیریم.

در مثال بالا نیرو ثابت، عمودی و برابر $-mg$ است (علامت منفی به علت جهت رو به پایین آن است). سرعت نیز برابر نرخ تغییرات مکان، یا همان ارتفاع h ، برحسب زمان است. بنابراین، نرخ تغییرات انرژی جنبشی برابر است با $-mg(dh/dt)$. مشاهده می‌کنید که مقدار آن به طور اعجاب‌انگیزی قرینه یک مفهوم فیزیکی دیگر است؛ قرینه آهنگ تغییرات mgh برحسب زمان! در نتیجه با سپری شدن زمان، تغییرات انرژی جنبشی و تغییرات کمیت mgh برابر و قرینه یکدیگرند. پس مجموع این دو، همواره مقداری ثابت خواهد بود.

ما با استفاده از قانون دوم نیوتون نشان دادیم که انرژی نیروهای ثابت، پایستار است، هر چند انرژی پتانسیل (mgh) جسم به انرژی جنبشی ($\frac{1}{2}mv^2$) تغییر شکل می‌دهد (و بالعکس). حال این موضوع را بیشتر بررسی می‌کنیم و سعی می‌کنیم با بسط دادن این مفهوم، به نگرشی عمیق‌تر دست یابیم. آیا این پدیده فقط در هنگام سقوط آزاد یک جسم رخ می‌دهد یا نمودهایی عمومی‌تر نیز دارد؟ بنابر آنچه در زمینه‌ی بقای انرژی گفتیم، انتظار می‌رود این حکم برای یک جسم متحرک تحت اثر وزن خود در یک مسیر بدون اصطکاک (شکل ۱.۱۳) صادق باشد. چنانچه جسم از ارتفاع اولیه H به ارتفاع مشخص h برسد، این فرمول به طور مشابه صدق خواهد کرد، حتی اگر سرعت در جهتی غیر از راستای عمود باشد. هدف ما این است که علت صحت قضیه در این شرایط را بررسی کنیم. طبق تحلیلی مشابه به مسئله می‌پردازیم و آهنگ تغییرات انرژی جنبشی آن را محاسبه می‌کنیم. مجدداً خواهیم داشت $mg(dv/dt)$ ، اما $m(dv/dt)$ آهنگ تغییرات بزرگی تکانه و یا نیروی مماسی^۴ F_t در راستای حرکت است، بنابراین

$$\frac{dT}{dt} = mv \frac{dv}{dt} = F_t v.$$

سرعت، آهنگ تغییر مکان در راستای منحنی ds/dt است و در این مثال نیروی مماسی F_t برابر $-mg$ نیست، ولی با نرخ تغییر ارتفاع عمود (dh) برحسب جابه‌جایی در راستای سطح (ds) کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر

$$F_t = -mg \sin \theta = -mg \frac{dh}{ds},$$

در نتیجه

^۴Tangential force

$$F_t \frac{ds}{dt} = -mg \left(\frac{dh}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right) = -mg \frac{dh}{dt},$$

از آنجا که ds از صورت و مخرج ساده می‌شود، به عبارت $-mg(dh/dt)$ دست می‌یابیم که مجدداً برابر با نرخ تغییر $-mgh$ است.

به جهت درک کارکرد پایستگی انرژی در مکانیک، می‌بایست راجع به تعدادی مفاهیم جدید که در تحلیل مسائل به ما کمک می‌کنند صحبت کنیم. ابتدا نرخ تغییرات انرژی جنبشی در سه بُعد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. انرژی جنبشی در سه بُعد به صورت زیر است:

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

پس از مشتق‌گیری از عبارت فوق، عبارتی با سه جمله نازیبیا خواهیم داشت:

$$\frac{dT}{dt} = m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right). \quad (4.13)$$

لکن $m(dv_x/dt)$ همان نیروی F_x یا نیروی وارد بر جسم در جهت x است. بنابراین صورت ساده شده‌ی معادله (۴.۱۳) به شکل $F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$ است. با به یادآوردن قواعد حساب برداری می‌توانیم عبارت فوق را به شکل خلاصه شده $F \cdot v$ بنویسیم. لذا

$$dT/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.13)$$

نتیجه بالا به طریقی سریع‌تر نیز قابل استنتاج است. چنانچه a و b دو بردار وابسته به زمان باشند، مشتق زمانی $a \cdot b$ در حالت کلی به صورت زیر است

$$d(a \cdot b)/dt = \mathbf{a} \cdot (d\mathbf{b}/dt) + (d\mathbf{a}/dt) \cdot \mathbf{b}. \quad (6.13)$$

با در نظرگرفتن $a = b = v$ خواهیم داشت

$$\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}. \quad (7.13)$$

از آنجا که مفاهیمی همچون انرژی یا انرژی جنبشی بسیار حائز اهمیت هستند، جملات مهم این گونه معادلات با اسامی گوناگونی شناخته می‌شوند. برای مثال $\frac{1}{2}mv^2$ ، با نام انرژی جنبشی شناخته می‌شود. $F \cdot v$ نیز توان^۵ نامیده می‌شود. حاصل ضرب (نقطه‌ای) نیروی وارد بر جسم در سرعت جسم، برابر توانی است که نیرو به جسم مورد نظر می‌دهد. در نتیجه ما به یک قضیه جالب دست یافته‌ایم: آهنگ تغییرات انرژی جنبشی یک جسم برابر است با توان داده شده توسط نیروهای وارد بر آن.

اما کار هنوز به اتمام نرسیده است؛ برای مطالعه دقیق‌تر مفهوم بقای انرژی قصد داریم مسأله را به صورت جزئی‌تر تحلیل کنیم. ابتدا تغییرات انرژی جنبشی را در یک بازه زمانی بی‌نهایت کوچک dt مورد

^۵Power

فصل ۱۳. کار و انرژی پتانسیل (۱)

ارزیابی قرار می‌دهیم. اگر طرفین معادله (۷.۱۳) را در dt ضرب کنیم درمی‌یابیم که تغییرات دیفرانسیلی انرژی جنبشی برابر است با حاصل ضرب داخلی نیرو در جابه‌جایی دیفرانسیلی جسم:

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (۸.۱۳)$$

پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت

$$\Delta T = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (۹.۱۳)$$

معنای عبارت فوق این است که چنانچه جسمی در مسیری دلخواه تحت اثر نیرویی در حرکت باشد، تغییرات انرژی جنبشی آن از مکانی به مکان دیگر، با انتگرال حاصل ضرب مؤلفه نیرو در راستای مسیر در دیفرانسیل جابه‌جایی (ds) برابر است. برای این انتگرال نامی برگزیده‌اند، کار انجام شده توسط نیرو بر روی جسم. مشاهده می‌کنیم که توان، معادل کار انجام شده در واحد زمان است. همچنین مشاهده می‌کنیم که تنها یک مختصه نیرو، یعنی مختصه‌ی در راستای حرکت جسم، در میزان کار انجام شده تأثیرگذار است. در مثال ساده‌ی ما، نیروها تماماً در راستای عمود بودند و تنها یک مؤلفه، F_z ، برابر با $-mg$ داشتند. در این شرایط مسیر حرکت جسم اهمیتی ندارد. برای مثال هنگام سقوط جسم در یک مسیر سهموی، معادله‌ی $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را می‌توان به صورت $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ نوشت. این عبارت به صورت $F_z dz = -mg dz$ ساده‌سازی می‌شود؛ چرا که دیگر مؤلفه‌های نیرو برابر با صفر اند. در نتیجه مسأله ساده ما به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg(z_2 - z_1), \quad (۱۰.۱۳)$$

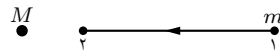
بنابراین دوباره مشاهده می‌کنیم ارتفاع عمودی از مبدأ اندازه‌گیری، تنها متغیر موثر در انرژی پتانسیل است. حال کمی در مورد واحدها صحبت کنیم. از آنجا که واحد نیرو، نیوتون است و با ضرب کردن آن در میزان جابه‌جایی به مقدار کار انجام شده می‌رسیم، واحد کار نیوتون-متر ($N \cdot m$) خواهد بود. اما استفاده از لفظ نیوتون-متر برای بسیاری از مردم ناخوشایند است و استفاده از ژول^۶ (J) را ترجیح می‌دهند. یک ژول برابر یک نیوتون-متر است و کار با مقیاس ژول سنجش می‌شود. همچنین واحد توان، ژول بر ثانیه خواهد بود که با نام وات^۷ (W) نیز شناخته می‌شود. اگر توان را در زمان صرف شده ضرب کنیم به میزان کار انجام شده خواهیم رسید. کار انجام شده توسط وسایل الکتریکی منازل ما برابر حاصل ضرب توان آن‌ها در زمان صرف شده است. در چنین مواردی به عباراتی نظیر کیلووات-ساعت^۸ برمی‌خوریم؛ ۱۰۰۰ وات ضرب در ۳۶۰۰ ثانیه، برابر با $10^6 \times 36 \times 10^6$ ژول.

اکنون به مثال دیگری از قانون پایستگی انرژی خواهیم پرداخت. جسمی را متصور شوید که دارای انرژی جنبشی اولیه است و با سرعت بسیار زیادی بر روی یک سطح دارای اصطکاک در حرکت است. بدیهی است که جسم از حرکت باز خواهد ایستاد. در ابتدای امر انرژی جنبشی غیر صفر است اما در نهایت به صفر خواهد رسید. نیروها باید کاری انجام داده باشند؛ چرا که هرگاه پای اصطکاک در میان باشد، حتماً یک مؤلفه در خلاف جهت حرکت وجود دارد که موجب می‌شود انرژی به طور مداوم از دست برود. حال جسمی را روی یک محور عمودی در حال حرکت رفت و برگشت نوسانی بدون اصطکاک و تحت تأثیر یک میدان گرانشی فرض کنید. آنچه در این جا رخ می‌دهد متفاوت خواهد بود؛ زیرا هنگامی که جسم در حال

^۶Joule

^۸Kilowatt Hours

^۷Watt



۲.۱۳. جرم کوچک m در اثر گرانش بر روی جرم بزرگ M سقوط می‌کند.

حرکت رو به بالا است، نیرو رو به پایین است و هنگامی که جسم در حال پایین آمدن است، نیرو باز هم رو به پایین است. بنابراین، علامت $F \cdot ds$ در هنگام پایین آمدن قرینه بالا رفتن است. در نتیجه برای هر نقطه دلخواه مقدار $F \cdot ds$ در هر دو مسیر بالا و پایین برابر، ولی با علامت قرینه خواهد بود، پس حاصل انتگرال کلی برابر با صفر است و انرژی جنبشی دریافت شده توسط جسم دقیقاً هم اندازه‌ی انرژی جنبشی از دست رفته است، یعنی همان اصل پایستگی انرژی (توجه داشته باشید که در صورت وجود اصطکاک، اصل بقای انرژی در نگاه اول متناقض به نظر می‌رسد؛ پس باید به دنبال انواع دیگری از انرژی باشیم. گرمای تولید شده در یک جسم حین کشیده شدن روی سطحی دیگر، جواب پرسش ما است، اما فعلاً فرض می‌کنیم چیزی از آن نمی‌دانیم).

۲.۱۳ کار انجام شده توسط گرانش

مسئله‌ی بعدی اندکی پیچیده‌تر از مسائل پیشین است. در این مسئله با نیروهای غیرثابت در راستای غیرعمودی مواجه هستیم؛ مانند گردش یک سیاره به دور خورشید یا گردش یک ماهواره به دور زمین.

ابتدا باید حرکت جسمی را که از نقطه ۱ مستقیماً به سمت خورشید و یا زمین سقوط می‌کند مورد بررسی قرار دهیم (شکل ۲.۱۳). آیا در این حالت قاعده‌ای برای بقای انرژی موجود است؟ تنها تفاوت این مثال با مثال‌های قبلی در متغیر بودن نیرو است. همان طور که از قبل می‌دانیم، نیرو به صورت ضرب $-GM/r^2$ در جرم m است، و در این مسئله جرم m متحرک است. برای یک جرم در حال سقوط، مادامی که مسافت سقوط افزایش یابد انرژی جنبشی نیز افزایش می‌یابد؛ البته این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که ما نگران تغییر نیرو برحسب ارتفاع نباشیم. سوال اینجاست که آیا می‌توان فرمولی متفاوت با mgh ، برای انرژی پتانسیل به صورت تابعی برحسب فاصله از سطح زمین بیابیم؟ در این صورت صحت اصل پایستگی انرژی کماکان حفظ می‌شود.

حل این مسئله یک بُعدی چندان مشکل نیست؛ چرا که می‌دانیم تغییرات انرژی جنبشی برابر انتگرال $-GMm/r^2$ ضرب در جابه‌جایی dr ، از آغاز تا پایان مسیر حرکت است:

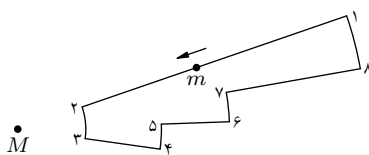
$$T_2 - T_1 = - \int_1^2 GMm \frac{dr}{r^2}. \quad (۱۱.۱۳)$$

در این رابطه نیازی به کسینوس نیست، زیرا جابه‌جایی و نیرو هم‌جهت هستند. انتگرال‌گیری از عبارت dr/r^2 نیز آسان است. حاصل برابر $1/r$ - خواهد بود؛ فلذا معادله (۱۱.۱۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$T_2 - T_1 = +GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (۱۲.۱۳)$$

بنابراین ما فرمول دیگری برای انرژی پتانسیل انرژی داریم. معادله (۱۲.۱۳) بیان می‌دارد کمیت $(\frac{1}{2}mv^2 - GMm/r)$ محاسبه شده در نقطه ۱، نقطه ۲ و یا هر نقطه دیگر مقدار ثابتی دارد.

فصل ۱۳. کار و انرژی پتانسیل (۱)



۳.۱۳. یک مسیر بسته در یک میدان گرانشی.

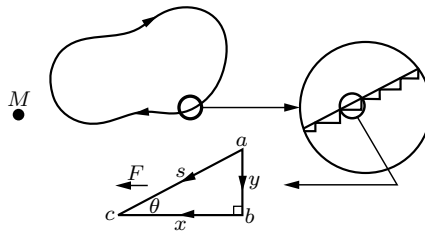
اکنون ما فرمولی برای انرژی پتانسیل در میدان گرانشی، ویژه حرکت عمودی در دست داریم. حال می‌خواهیم با مسأله‌ای هیجان‌انگیزتر مواجه شویم. آیا می‌توان حرکتی دائمی در میدان گرانشی تولید کرد؟ میدان گرانشی متغیر است و در نقاط مختلف جهت و قدرت متفاوت دارد. آیا می‌توان مسیری معین و بدون اصطکاک مشخص نمود، به نحوی که از یک نقطه آغاز شود، جسمی را به نقطه‌ای بالاتر ببرد، تحت یک حرکت خمیده به نقطه سومی منتقل کند، آن را تا فاصله مشخصی پایین بیاورد، جسم را روی یک مسیر شیب‌دار به محل دیگری براند و در انتها آن را به نقطه آغاز بازگرداند؟ آیا در طی مسیر، کار مشخصی توسط میدان گرانشی انجام شده و انرژی جنبشی جسم افزایش یافته است؟ آیا می‌توانیم منحنی جدیدی طراحی کنیم که قدری سریع‌تر از آنچه گفته شد باشد؟ اگر چنین چیزی ممکن باشد، جسم همواره روی این مسیر خواهد چرخید و ما به یک حرکت همیشگی دست یافته‌ایم. از آنجا که حرکت ابدی امری محال است، احتمالاً یافتن چنین مسیری هم غیرممکن خواهد بود؛ اما می‌بایست به این قضیه واقف باشیم که در غیاب اصطکاک، جسم می‌تواند بدون کاهش یا افزایش انرژی به نقطه آغاز بازگردد؛ در این صورت حرکت متناوب روی هر مسیر بسته‌ای میسر می‌شود. به عبارت دیگر، کار نیروی گرانش روی هر مسیر بسته برابر صفر است، زیرا در غیر این صورت در هر چرخه انرژی از دست می‌رود (چنانچه میزان کار انجام شده کمتر از صفر باشد، سرعت کاهش می‌یابد؛ در نتیجه حرکت همیشگی تنها در صورتی ممکن است که کار انجام شده در هر مسیر بسته برابر صفر باشد).

آیا کار انجام شده واقعاً برابر صفر است؟ باید این امر را ثابت کنیم. ابتدا کم و بیش توضیح می‌دهیم چرا انتظار داریم این مقدار برابر با صفر باشد، سپس آن را به صورت ریاضیاتی بررسی می‌کنیم. فرض کنید ما یک مسیر ساده مشابه آنچه در شکل ۳.۱۳ نشان داده شده در اختیار داریم و جسم کوچکی ابتدا از نقطه ۱ به ۲ منتقل می‌شود، سپس روی یک دایره به نقطه ۳ و بعد به نقطه ۴ منتقل شده، و به طور مشابه نقاط ۵، ۶، ۷ و ۸ را نیز پشت سر گذاشته و در انتها دوباره به نقطه ۱ بازمی‌گردد. تمامی مسیرهای مرسوم، یا شعاعی‌اند یا مماسی، به نحوی که M مرکز دایره مورد نظر است. کار انجام شده طی حرکت نقطه m بر روی این مسیر چه قدر است؟ در مسیر بین نقاط ۱ و ۲، این مقدار برابر حاصل ضرب GMm در تفاضل مقدار $1/r$ دو نقطه است:

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 -GMm \frac{dr}{r^2} = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

از نقطه ۲ تا ۳، نیرو کاملاً عمود بر منحنی است، در نتیجه $W_{23} \equiv 0$. برای مسیر ۳ به ۴ نیز خواهیم داشت:

$$W_{34} = \int_3^4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = GMm \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right).$$



۴.۱۳. بیانگر یک مسیر هموار و بسته که با مسیرهای مماسی و شعاعی تقریب زده شده و یکی از مسیرها در ابعاد بزرگ نشان داده شده است.

به طور مشابه برای نقاط دیگر داریم:

$$W = GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_8} - \frac{1}{r_7} \right).$$

از آنجا که می‌دانیم $r_2 = r_3$ ، $r_4 = r_5$ ، $r_6 = r_7$ و $r_8 = r_1$ ، در نتیجه $W = 0$. ممکن است این منحنی بسیار تصنعی به نظر برسد. در مورد منحنی‌های واقعی چه می‌توان گفت؟ می‌خواهیم مسأله را با یک منحنی واقعی امتحان کنیم. قبل از هر چیز می‌توان ادعا کرد مشابه شکل ۴.۱۳، هر منحنی واقعی، با تعدادی مسیر دنداندار قابل شبیه‌سازی است. بنابراین حدس ما صحیح است. با اندکی تلاش می‌توان نشان داد کار انجام شده بر روی یک مسیر مثلث‌گون برابر صفر است (شکل ۴.۱۳). آیا کار انجام شده طی حرکت روی مثلث از a به b و سپس از b به c برابر کار انجام شده در مسیر مستقیم a به c است؟ تصور کنید نیرو در جهت معینی اثر می‌کند، برای مثال در راستای bc . می‌توان مثلث را آن چنان کوچک فرض کرد که نیرو در کل سطح مثلث مقداری حدوداً ثابت باشد. اما کار انجام شده از a تا c چه مقدار است؟ داریم:

$$W_{ac} = \int_a^c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F s \cos \theta,$$

نیرو ثابت است و می‌توانیم کار انجام شده در هر دو مسیر مثلث را محاسبه کنیم. در راستای عمودی ab نیرو عمود بر راستای ds است، بنابراین کار انجام شده برابر صفر است. در راستای افقی bc نیز داریم:

$$W_{bc} = \int_b^c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F x.$$

لذا، مشهود است که کار انجام شده در این مسیر با کار انجام شده در مسیر مایل برابر است، زیرا $s \cos \theta$ برابر است با x . پیش از این نشان دادیم کار انجام شده روی هر مسیر متشکل از قطعات مشابه شکل ۳.۱۳ برابر صفر است و کار انجام شده طی عبور از دو گوشه برابر کاری است که روی مسیرهای مرسوم انجام می‌شود (طول قطعات باید به اندازه کافی کوچک باشند؛ البته می‌توانیم آن‌ها را هر قدر بخواهیم کوچک کنیم)، بنابراین کار انجام شده روی هر مسیر بسته در یک میدان گرانشی برابر صفر است.

این نتیجه‌ی مهم اطلاعاتی بدیع راجع به حرکت‌های نجومی به ما می‌دهد. طبق این قضیه هنگامی که سیاره‌ای بر گرد خورشید می‌چرخد (بدون هیچ شیء و نیروی دیگر)، بر مسیری حرکت خواهد کرد که اگر مربع سرعت در هر نقطه از آن را از حاصل تقسیم تعدادی ثوابت بر شعاع مسیر در همان نقطه از مسیر

فصل ۱۳. کار و انرژی پتانسیل (۱)

کم کنیم، حاصل آن در تمامی مسیر مقداری ثابت خواهد ماند. برای مثال نزدیک‌ترین سیاره به خورشید سریع‌ترین نیز هست، اما چقدر؟ چنانچه به جای حرکت دورانی سیاره حول خورشید، جهت سرعت (و نه بزرگی) آن را به نحوی تغییر دهیم که کاملاً در راستای شعاع حرکت کند و سپس بگذاریم از شعاعی معین به شعاع مورد نظر سقوط کند، سرعت جدید می‌بایست برابر سرعت دوران فعلی آن باشد؛ چرا که مسیر توصیف شده نیز مثالی از یک مسیر بسته پیچیده است. بنابراین اگر به فاصله قبلی بازگردیم، انرژی جنبشی دوباره به مقدار سابق خود می‌رسد. پس چه حرکت، حقیقی و بدون تیزی باشد و چه حرکتی دندانه‌دار و دارای تغییر جهت ناگهانی، به شرط عدم وجود اصطکاک انرژی جنبشی سیاره در یک نقطه، مقدار معینی خواهد داشت.

اگر مشابه آن چه قبل‌تر انجام دادیم، تحلیلی ریاضیاتی از حرکت سیاره حین چرخش داشته باشیم، به کمک بقای انرژی می‌توانیم دریابیم که در محاسبه این کمیت ثابت، یعنی انرژی، مرتکب خطای محاسباتی شده‌ایم یا نه. برای چرخش نشان داده در جدول ۲-۹ میزان انرژی متغیر است^۹ و از شروع تا پایان در حدود ۱/۵٪ تغییر می‌کند. اما چرا؟ آیا این اتفاق به علت تحلیل در فواصل مشخص است یا اشتباهی جزئی در محاسبات ما رخ داده است؟

انرژی را در مسأله‌ی دیگری ارزیابی می‌کنیم: جرمی بر روی یک فنر. هنگامی که جسم را از حالت تعادل خود جابه‌جا می‌کنیم، نیروی بازدارنده متناسب با جابه‌جایی است. آیا بر چنین ساز و کاری پایداری انرژی حاکم است؟ بله، چرا که کار چنین نیرویی به صورت زیر است:

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x -kx dx = -\frac{1}{2}kx^2. \quad (۱۳.۱۳)$$

در نتیجه در مسأله‌ی جرم روی فنر، مجموع انرژی جنبشی به علاوه‌ی $\frac{1}{2}kx^2$ مقدار ثابتی است، اما ببینیم چگونه. ما جسم را به سمت پایین می‌فشاریم. جسم در حال سکون است و سرعتی برابر صفر دارد، اما x به میزان بیشینه خود رسیده‌است؛ بنابراین تنها انرژی پتانسیل داریم. هنگامی که فنر را رها می‌کنیم، اتفاقات مختلفی رخ می‌دهند (جزئیات مد نظر ما نیست)، اما در هر لحظه مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل مقدار ثابتی دارد. برای مثال در حین عبور جسم از نقطه تعادل، x برابر صفر است، ولیکن در همین لحظه v^2 به حداکثر خود رسیده. هرچه x^2 افزایش یابد، v^2 کاهش می‌یابد. لزوم برقراری تعادل بین x^2 و v^2 جسم را در آمد و شد نگاه می‌دارد؛ در نتیجه به قانون جدیدی دست یافته‌ایم. انرژی پتانسیل فنر برابر $\frac{1}{2}kx^2$ است، البته اگر نیروی آن به صورت $-kx$ باشد.

۳.۱۳ جمع کردن انرژی

اکنون قصد داریم نگاهی به آنچه در حضور چندین شیء رخ می‌دهد بیندازیم. تصور کنید با مسأله‌ای پیچیده و مرکب از چندین جسم مواجه هستیم، اجسام به صورت $i = ۱, ۲, ۳, \dots$ شماره‌گذاری شده‌اند و همگی تحت اثر گرانش یکدیگرند. در این شرایط دقیقاً چه اتفاقی رخ می‌دهد؟ هدف ما این است که نشان دهیم مجموع انرژی‌های جنبشی تمام اجسام با مجموع انرژی‌های پتانسیل متقابل بین هر دو جسم مقداری ثابت

^۹ در واحدهای جدول ۲-۹ انرژی بر واحد جرم برابر است با $1/r - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)$

است:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{(ij \text{ جفت‌های})} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \text{const.} \quad (۱۴.۱۳)$$

چگونه چنین ادعایی را ثابت می‌کنیم؟ از هر دو طرف معادله نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و به صفر می‌رسیم. اگر از $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ مشتق‌گیری کنیم، مشابه معادله (۵.۱۳) به نیرو خواهیم رسید. بر اساس آنچه از قانون گرانش نیوتون می‌دانیم، نیروهای بین اجرام را جای‌گذاری می‌کنیم و متوجه می‌شویم آنچه در طرف چپ ظاهر شده گزینه مشتق زمانی عبارت زیر است:

$$\sum_{\text{جفت‌ها}} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} \cdot \mathbf{r}_{ij}.$$

مشتق انرژی جنبشی نسبت به زمان به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 &= \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \\ &= \sum_i \left(\sum_j -\frac{Gm_i m_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \right) \cdot \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (۱۵.۱۳)$$

مشتق انرژی پتانسیل نسبت به زمان نیز به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\text{جفت‌ها}} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \sum_{\text{جفت‌ها}} \left(+\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^2} \right) \left(\frac{dr_{ij}}{dt} \right).$$

اما

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{dr_{ij}}{dt} &= \frac{1}{r_{ij}} \left[2(x_i - x_j) \left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_j}{dt} \right) \right. \\ &\quad + 2(y_i - y_j) \left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dy_j}{dt} \right) \\ &\quad \left. + 2(z_i - z_j) \left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_j}{dt} \right) \right] \\ &= \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j}{r_{ij}} \\ &= \mathbf{r}_{ij} \cdot \frac{\mathbf{v}_i}{r_{ij}} + \mathbf{r}_{ji} \cdot \frac{\mathbf{v}_j}{r_{ji}}, \end{aligned}$$

از آنجا که $r_{ij} = r_{ji}$ و $r_{ij} = -r_{ji}$ پس

$$\frac{d}{dt} \sum_{\text{جفت‌ها}} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \sum_{\text{جفت‌ها}} \left[\frac{Gm_i m_j \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{Gm_j m_i \mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3} \cdot \mathbf{v}_j \right]. \quad (۱۶.۱۳)$$

اما باید به معنای $\sum_i \{\sum_j\}$ و $\sum_{\text{جفت‌ها}}$ توجه داشته باشیم. در معادله (۱۵.۱۳)، $\sum_i \{\sum_j\}$ به این معناست که i تمامی مقادیر $1, 2, 3, \dots$ را پذیرا است و به ازای هر مقدار i ، شاخص j تمامی مقادیر موجود غیر از مقدار i را شامل می‌شود. برای مثال اگر $i = 3$ در این صورت مقادیر j به صورت $1, 2, 4, \dots$ خواهد بود.

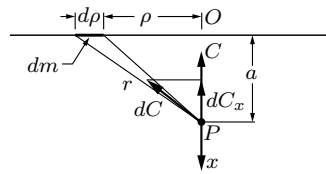
در معادله (۱۶.۱۳)، $\sum_{\text{جفت‌ها}}$ به معنای این است که هر یک از مقادیر عددی i و j تنها یک بار محاسبه می‌شوند. مثلاً به ازای اجسام ۱ و ۳ تنها یک جمله در سری موجود است. برای این منظور i باید بدون قید و شرط تمامی اعداد $1, 2, 3, \dots$ را بپذیرد و j تنها مجاز به اختیار اعداد بزرگتر از i باشد. برای مثال اگر $i = 3$ ، j فقط مقادیر $4, 5, 6, \dots$ را به خود می‌گیرد. نباید از یاد ببریم که برای هر i و j دو جمله در سری موجود است؛ یکی به ازای v_i و دیگری به ازای v_j و این دو جمله ظاهر یکسانی در معادله (۱۵.۱۳)، که در آن تمامی مقادیر i و j (به جز $i = j$) موجود است، دارند. بنابراین با مقایسه یک به یک بین معادلات (۱۵.۱۳) و (۱۶.۱۳)، مشاهده می‌شود که این دو معادله کاملاً یکسان اند، اما با علامت مخالف؛ در نتیجه مشتق مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل نسبت به زمان برابر صفر است. برای مجموعه‌ای از اجسام، انرژی جنبشی کل برابر مجموع انرژی جنبشی تک تک آن‌ها است و انرژی پتانسیل کل نیز برابر مجموع انرژی پتانسیل بین هر جفت از آن‌ها است. در مورد انرژی پتانسیل این حکم قابل درک است. فرض کنید می‌خواهیم کار لازم برای کنار هم قرار دادن اجسام به فواصل معین از یکدیگر را محاسبه کنیم. برای این کار آن‌ها را یک‌به‌یک از فواصل بینهایت دور، جایی که در آن هیچ نیرویی در کار نیست، آورده و در چند مرحله کنار یکدیگر قرار می‌دهیم. ابتدا جسم شماره یک را منتقل می‌کنیم. در این عمل نیازی به انجام کار نیست، زیرا فعلاً هیچ جسم دیگری وجود ندارد که بر آن اعمال نیرو کند. در مرحله بعد، جسم شماره دو با اعمال کاری به اندازه $W_{12} = -Gm_1 m_2 / r_{12}$ به مکان مورد نظر منتقل می‌شود. در اینجا نکته‌ای حائز اهمیت نهفته است. فرض کنید جسم بعدی را به مکان سه منتقل کنیم. نیروی وارد بر جسم شماره سه را می‌توان به صورت جمع نیروهای وارده از طرف اجسام یک و دو نوشت. پس کار انجام شده بر روی جسم شماره سه برابر مجموع کار انجام شده توسط هر یک از دو جسم بر روی آن است؛ زیرا F_3 را می‌توان به صورت مجموع دو نیرو زیر نوشت:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23},$$

و کار انجام شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{F}_{13} \cdot d\mathbf{s} + \int \mathbf{F}_{23} \cdot d\mathbf{s} = W_{13} + W_{23}.$$

بر اساس آنچه بیان شد، چنانچه نیروها به طور مستقل عمل کنند، کار کل برابر مجموع کار تک تک نیروها است. بنابراین کار لازم جهت تولید یک پیکربندی مشخص از اجسام دقیقاً برابر انرژی پتانسیل ذکر شده در معادله (۱۶.۱۳) است. این قضیه معلول پیروی گرانث از اصل برهم‌نهی نیروهاست؛ به همین علت ما مجاز به جمع کردن انرژی پتانسیل بین هر دو جفت از اجسام به عنوان انرژی پتانسیل کل هستیم.



۵.۱۳. میدان گرانشی C تولیدشده توسط صفحه‌ای جرم‌دار و بی‌نهایت وسیع بر یک جرم نقطه‌ای.

۴.۱۳ میدان گرانشی اجسام بزرگ

اکنون میدان گرانشی ناشی از توزیع جرم را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. تا به اینجا در رابطه با توزیع اجرام سخن چندانی به میان نیاورده‌ایم و در ارتباط با ذرات بحث کرده‌ایم، پس محاسبه نیروهای ناشی از مجموعه‌ای گسترده از اجرام جذاب خواهد بود. ابتدا باید نیروی گرانش ناشی از یک صفحه‌ای جرم‌دار بی‌نهایت وسیع وارد بر یک جرم نقطه‌ای را محاسبه کنیم. نیروی گرانش حاصل از یک صفحه، وارد بر جرم در نقطه‌ی P (شکل ۵.۱۳) بدیهتاً به سمت صفحه خواهد بود. فرض کنید فاصله‌ی نقطه مذکور تا صفحه برابر a و چگالی سطحی جرم ثابت و برابر μ باشد. در این صورت میدان کوچک dC تولید شده توسط جرم dm واقع در فاصله‌ی بین ρ و $\rho + d\rho$ از نقطه O چیست؟ (O نزدیک‌ترین نقطه صفحه به P است). پاسخ به صورت $dC = -G(dm r/r^3)$ است. این میدان در راستای r است و ما می‌دانیم پس از محاسبه مجموع dC ها تنها مؤلفه x آنها باقی می‌ماند. مؤلفه x میدان dC به صورت زیر است:

$$dC_x = -G \frac{dm r_x}{r^3} = -G \frac{dm a}{r^3}.$$

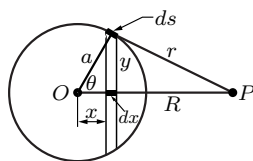
تمامی dm هایی که در فاصله یکسان r از P واقع شده‌اند، میدان dC_x برابری خواهند داشت. بنابراین می‌توانیم برای dm های روی حلقه‌ای بین ρ و $\rho + d\rho$ بنویسیم: $dm = \mu 2\pi \rho d\rho$ مساحت حلقه‌ای به شعاع ρ و عرض $d\rho$ ، با شرط $d\rho \ll \rho$ است). در نتیجه خواهیم داشت

$$dC_x = -G\mu 2\pi \rho \frac{d\rho a}{r^3}.$$

می‌دانیم $a^2 = r^2 - \rho^2$ و $\rho d\rho = r dr$ فلذا می‌توان نوشت

$$C_x = -2\pi G\mu a \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = -2\pi G\mu a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\infty} \right) = -2\pi G\mu. \quad (۱۷.۱۳)$$

به نحو اعجاب انگیزی مشاهده می‌کنیم که نیرو مستقل از فاصله a است! اما چرا؟ آیا اشتباهی مرتکب شده‌ایم؟ ممکن است تصور کنید در اثر دور شدن نیرو می‌بایست ضعیف‌تر شود؛ اما نه! هرچه به سطح نزدیک‌تر می‌شویم، بخش بیشتری از جرم در زاویه‌ای نامطلوب قرار می‌گیرد و هرچه از آن فاصله بگیریم، مقدار بیشتری از سطح در زاویه‌ای مناسب به منظور برقراری جاذبه قرار می‌گیرد. در همه فواصل مؤثرترین بخش صفحه، آن قسمتی است که درون یک مخروط واقع شده. هنگام دور شدن از سطح، نیرو به صورت عکس مجذور کاهش می‌یابد، اما در مخروطی مشابه و با زاویه‌ای برابر، مقدار بیشتری از سطح می‌گنجد و این



۶.۱۳. پوسته‌ی کروی نازکی از جرم یا بار.

افزایش سطح درست متناسب با مربع فاصله است! می‌توانیم تحلیل خود را دقیق‌تر کنیم؛ سهم دیفرانسیل هر مخروط دلخواه، مستقل از فاصله است چرا که تغییرات جرم درون مخروط و قدرت نیروی گرانش خنثی‌کننده یکدیگرند. البته نیرو واقعاً ثابت نیست، زیرا هنگامی که به سمت دیگر صفحه می‌رویم جهت نیرو قریب می‌شود.

ما به طور غیرمستقیم یک مسأله الکتروستاتیک را نیز حل کرده‌ایم. اگر یک صفحه که به طور یکنواخت با چگالی بار σ باردار شده است در اختیار داشته باشیم، میدان الکتریکی در نقطه‌ای خارج از سطح برابر است با $\sigma/2\epsilon_0$. جهت آن در صورت مثبت بودن بار سطح، رو به بیرون و در صورت منفی بودن رو به داخل است. برای اثبات این امر کافی است به یادآوریم که نقش $-G$ در گرانش دقیقاً مشابه نقش $1/4\pi\epsilon_0$ در الکتریسیته است.

فرض کنید دو صفحه در اختیار داریم که یکی با چگالی بار $+\sigma$ و دیگری با چگالی بار $-\sigma$ باردار شده است. اگر دو صفحه را در فاصله D از یکدیگر قرار دهیم میدان به چه صورت خواهد بود؟ خارج از دو صفحه میدان برابر صفر است. ولی چرا؟ زیرا میدان یکی جاذب و دیگری دافع خواهد بود. از آنجا که بزرگی نیرو مستقل از فاصله است، دو میدان اثر یکدیگر را خنثی خواهند کرد! اما در بین دو صفحه بزرگی میدان دقیقاً دو برابر بزرگی میدان هر یک از آن‌ها ($E = \sigma/\epsilon_0$) است و جهت آن از صفحه مثبت به صفحه منفی خواهد بود.

اکنون به مهم‌ترین و هیجان‌انگیزترین مسأله این بخش می‌رسیم. هنگام محاسبه نیروی گرانش زمین روی سطح یا بیرون از آن، همیشه فرض کرده‌ایم که تمامی جرم زمین در مرکز آن متمرکز شده است. صحت این فرض مورد تردید است؛ زیرا وقتی که در نزدیکی سطح زمین هستیم بخشی از جرم آن بسیار به ما نزدیک است، در حالی که بخش دیگری از جرم در فاصله دوری از ما قرار دارد. هنگامی که تمامی این آثار را لحاظ کرده و با یکدیگر جمع می‌کنیم، مشاهده می‌کنیم که برآیند این نیروها به طور معجزه‌آسایی درست برابر حالتی است که همه جرم زمین در مرکز آن واقع شود!

اکنون قصد داریم صحت این قضیه معجزه‌آسا را اثبات کنیم. این حکم را ابتدا برای یک پوسته کروی نازک یکنواخت اثبات می‌کنیم. فرض کنید جرم پوسته برابر m باشد. انرژی پتانسیل جرم m' ، واقع در فاصله R از مرکز کره را محاسبه کرده (شکل ۶.۱۳)، سپس نشان می‌دهیم پاسخ با حالتی که تمامی جرم m در مرکز آن واقع شود یکسان است (کار با انرژی پتانسیل به مراتب آسان‌تر از میدان است، زیرا دیگر لازم نیست نگران زوایا باشیم؛ کافی است انرژی پتانسیل تمام قطعات را با یکدیگر جمع کنیم). اگر فاصله مرکز تا بخش معینی از سطح را x بنامیم، کل جرم واقع بر قطعه dx در فاصله یکسان r از نقطه P قرار دارد و انرژی پتانسیل ناشی از این حلقه برابر $-Gm'dm/r$ است. چه مقدار جرم در قطعه کوچک dx قرار گرفته

است؟ جرم واقع در این نوار به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$dm = 2\pi y \mu ds = \frac{2\pi y \mu dx}{\sin \theta} = \frac{2\pi y \mu dx a}{y} = 2\pi a \mu dx,$$

که در آن $\mu = m/2\pi a^2$ برابر چگالی سطحی جرم پوسته‌ی کروی است (این یک قانون کلی است که مساحت سطح بخشی از کره، متناسب با ضخامت آن است). بنابراین انرژی پتانسیل ناشی از dm به صورت زیر خواهد بود:

$$dW = -\frac{Gm' dm}{r} = -\frac{Gm' 2\pi a \mu dx}{r}.$$

می‌دانیم

$$\begin{aligned} r^2 &= y^2 + (R-x)^2 = y^2 + x^2 + R^2 - 2Rx \\ &= a^2 + R^2 - 2Rx. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$2r dr = -2R dx$$

یا

$$\frac{dx}{r} = -\frac{dr}{R}.$$

بنابراین

$$dW = \frac{Gm' 2\pi a \mu dr}{R},$$

همچنین

$$\begin{aligned} W &= \frac{Gm' 2\pi a \mu}{R} \int_{R+a}^{R-a} dr \\ &= -\frac{Gm' 2\pi a \mu}{R} 2a = -\frac{Gm' (2\pi a^2 \mu)}{R} \\ &= -\frac{Gm'm}{R}. \end{aligned} \quad (۱۸.۱۳)$$

بنابراین انرژی پتانسیل جرم m' خارج از یک پوسته کروی نازک برابر با حالتی است که تمامی جرم آن را متمرکز بر مرکز فرض کنیم. زمین را می‌توان مجموعه‌ای از پوسته‌های کروی پنداشت که انرژی پتانسیل حاصل از آن‌ها تنها به جرم و فاصله جسم مورد نظر از مرکزشان بستگی دارد. با جمع کردن همه آن‌ها به جرم کل دست می‌یابیم؛ فلذا رفتار زمین مشابه حالتی است که تمامی جرمش را واقع بر مرکز فرض کرده‌ایم. حالتی که نقطه مورد نظر ما درون پوسته قرار گرفته باشد نیز قابل توجه است. باید محاسباتی مشابه اما با فرض اینکه P درون پوسته واقع شده انجام دهیم. در این حالت باید مثل گذشته تفاضل r ها را بدست آوریم اما این بار خواهیم داشت $R - (a + R) = -a$ یا قرینه دو برابر فاصله از مرکز. به بیان دیگر W این بار به صورت $W = -Gm'm/a$ خواهد بود، مستقل از R و مستقل از مکان. انرژی به این که ما درون کره در کدام نقطه هستیم بستگی ندارد؛ در نتیجه هنگامی که درون کره حرکت می‌کنیم، هیچ

فصل ۱۳. کار و انرژی پتانسیل (۱)

نیرو و کاری در کار نخواهد بود. هنگامی که انرژی پتانسیل در همه جا یکسان باشد، در هر کجا که باشید نیرویی حس نخواهید کرد. بنابراین درون پوسته نیرویی وجود ندارد. نیرو بیرون از آن است و مقدار آن مشابه حالتی است که کل جرم را در مرکز کره متصور شده‌ایم.