شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 11

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۱۱

مترجم: محمودرضا امینی

ویراستار و حروف‌چین: اندیشه سادات آزاد، علی باقری کوچکسرائی، محمودرضا امینی

نسخه‌ی ۱.۰ تابستان ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۱۱

بردارها[1]

۱.۱۱ تقارن‌ها در فیزیک

در این بخش ما به موضوع تقارن‌ها در قوانین فیزیک خواهیم پرداخت. کلمه «تقارن» در فیزیک در معنای خاصی به کار گرفته می‌شود و لازم است آن را به درستی تعریف کنیم. وقتی می‌گوییم چیزی متقارن است، منظور ما از این کلمه چیست؟ برای مثال وقتی یک تصویر متقارن داریم معنای آن این است که یک طرف آن شبیه طرف دیگر آن است. پروفسور هرمان وایلی[2] این تعریف را از معنای تقارن ارائه کرده است: «یک موجود متقارن است اگر بعد از قرار گرفتن تحت یک عملیات خاص دقیقا شبیه خودش شود». مثلاً اگر به یک گلدان که تقارن سمتی دارد نگاه کنیم و بعد آنها به اندازه ۱۸۰ درجه حول محور قائم بچرخانیم، شبیه حالت قبل از چرخش خواهد بود. تعریف ما از تقارن عام‌تر از تعریف وایلی خواهد بود و در چارچوب این تعریف جدید به بررسی تقارن‌ها در قوانین فیزیک خواهیم پرداخت.

فرض کنید که در یک مکان خاص یک سیستم فیزیکی قرار داده‌ایم، مثلاً یک ماشین پیچیده با تعداد زیادی برهمکنش‌های پیچیده ساخته‌ایم یا توپ‌هایی که در آن مکان با نیروهایی که بینشان موجود است در حال جست‌وخیز هستند یا هر مثال دیگری. حال فرض کنید در جایی دیگر یک سیستم فیزیکی کاملاً مشابه به سیستم قبلی ساخته‌ایم. دقیقاً با همان اجزاء، به همان اندازه و با همان جهت‌گیری فضایی و تنها با این تفاوت که همه‌ی اجزاء با اندازه‌های یکسان انتقال داده شده‌اند. حالا اگر هر دو ماشین را با شرایط اولیه‌ی یکسان راه‌اندازی کنیم، سوال مطرح‌شده آن است که آیا هر دو ماشین رفتار کاملاً یکسانی خواهند داشت؟ و در هر لحظه دقیقاً مانند یکدیگر رفتار خواهند کرد؟ طبیعتاً جواب منفی است! برای مثال اگر یکی از ماشین‌ها را به داخل یک اتاقک بسته منتقل کنیم، ممکن است برهمکنش ماشین با دیواره‌های اتاق در عملکرد ماشین اختلال ایجاد کند.

ما مفاهیم فیزیکی را برای این معرفی می‌کنیم که به وسیله‌ی آن‌ها بتوانیم مسئله‌های واقعی را توضیح بدهیم. این‌طور نیست که این ایده‌ها موجودات ریاضیاتی محض و بدون معنا باشند. ما باید بدانیم که وقتی درباره یکسانی عملکرد دو دستگاه در دو مکان متفاوت صحبت می‌کنیم، دقیقاً از چه چیزی حرف می‌زنیم. در واقع انتقال دستگاه از یک مکان به مکان دیگر به این معنا است که ما هر آنچه را که فکر می‌کنیم به عملکرد دستگاه مربوط است، جابه‌جا می‌کنیم. اگر مشاهدات ما نشان دادند که عملکرد دو دستگاه یکسان نیستند،

[1] vectors

[2] Hermann Weyl

معنایش این است که در این میان چیزی را در حین انتقال فراموش کرده‌ایم؛ اما اگر چیزی پیدا نکردیم که جا مانده باشد، آنگاه باید ادعا کنیم که قوانین فیزیک فاقد تقارن انتقالی می‌باشند و جابه‌جا کردن یک دستگاه فیزیکی باعث تغییر در رفتار آن می‌شود. اما از طرف دیگر اگر بدانیم که قوانین فیزیک دارای چنین تقارنی هستند، آنگاه توقع داریم عاملی بیرونی را بیابیم که مانع عملکرد درست دستگاه شده است. برای مثال این عامل می‌تواند فشار یک دیوار خارجی به بدنه دستگاه و تغییر در عملکرد آن باشد. در واقع سوال اساسی آن است که اگر ما همه عوامل درگیر در مسئله را به خوبی تعریف کنیم، به شرط آنکه هیچ نیروی خارجی مؤثری به دستگاه وارد نشود و در نهایت همه اجزا به‌طور کامل و دقیق از یک مکان به مکان دیگر منتقل شوند، آیا قوانین فیزیکی یکسان باقی خواهند ماند؟ آیا دستگاه با همان روال قبلی کار خواهد کرد؟

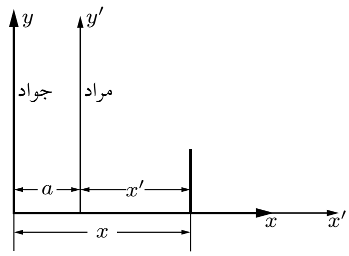
مشخص است که آنچه ما می‌خواهیم انجام بدهیم انتقال همه‌ی آنچه که در دنیا وجود دارد نیست، بلکه آنچه انتقال می‌یابد قسمت‌های اصلی و مؤثر خود سیستم هستند، چرا که اگرهمه‌ی ستاره‌ها و سیاره‌ها و همه‌ی چیزهای دیگر را به یک اندازه جابه‌جا کنیم، از آنجا که با این کار گویی به مکان اول برگشته‌ایم، به‌طور بدیهی هیچ اتفاق خاصی نخواهد افتاد. اما در عمل با به خرج دادن مقدار کمی هوشمندی درباره انتخاب چیزهایی که می‌خواهیم جابه‌جا کنیم، دستگاه ما درست مانند قبل کار خواهد کرد. به عبارت دیگر اگر وارد یک اتاق نشویم که دیواره‌های بر روی رفتار سیستم تاثیر بگذارد، اگر منشا نیروهای خارجی را بدانیم، و طوری عمل کنیم که آن نیروها به همان ترتیب جابه‌جا شدن دستگاه جابه‌جا شوند، آنگاه دستگاه در مکان جدید دقیقاً به همان ترتیبی کار خواهد کرد که در محل قبلی کار می‌کرده‌است.

۲.۱۱ انتقال‌ها

ما در این بخش تحلیل‌های خود را به حوزه مکانیک که درباره آن اطلاعات کافی داریم محدود می‌کنیم. در فصل قبل دیدیم که قوانین مکانیکی برای هر ذره به‌وسیله‌ی سه معادله‌ی زیر بیان می‌شوند

$$m(d^2x/dt^2) = F_x, \qquad m(d^2y/dt^2) = F_y, \qquad m(d^2z/dt^2) = F_z. \qquad (۱.۱۱)$$

این معادلات بیانگر آن‌اند که راهی وجود دارد تا به‌وسیله‌ی آن بتوانیم مختصه‌های متعامد x، y، z و نیروهای موجود در راستاهای متناظر آن‌ها را طوری اندازه‌گیری کنیم که معادلات بالا صحیح باشند. به عبارت دیگر این نیروها باید از یک مبدأ اندازه‌گیری شوند اما سوال این است که این مبدأ کجاست؟ تمام چیزی که نیوتن در قدم اول به ما می‌گوید این است که مبدائی وجود دارد که ما می‌توانیم اندازه‌گیری‌هایمان را نسبت به آن مبداء انجام دهیم، شاید جایی در مرکز کهکشان خودمان این سه قانون درست باشند؛ اما سریعاً می‌توان نشان داد که ما هیچ‌وقت قادر به پیدا کردن این مبداء نخواهیم بود چرا که اگر مبداء دیگری را برای این اندازه‌گیری‌ها انتخاب کنیم، تفاوتی در نتایج فیزیکی به‌دست نخواهند آمد. برای درک بهتر مسئله، بیاید دو شخص با نام‌های جواد با مبدائی مشخص و مراد با سیستمی مشابه و مبدائی متفاوت را تصور کنیم. حالا اگر جواد مختصات یک نقطه از فضا را اندازه‌گیری کند، اعداد x و y را گزارش می‌کند (معمولاً به‌خاطر سخت شدن رسم نمودارها و شکل‌ها از مؤلفه z چشم‌پوشی می‌کنیم)، درحالی که وقتی مراد همان نقطه را در فضا اندازه می‌گیرد، x و y متفاوتی را گزارش خواهد کرد. (برای تمایز قائل شدن بین مختصات جواد و مراد، برای نشان دادن مختصات مراد از نمادهای x' و y' استفاده می‌کنیم.) در ادامه برای راحتی فرض می‌کنیم y و y' پرایم برای مراد و جواد یکسان هستند. بنابراین خواهیم داشت:



شکل ۱.۱۱: دو دستگاه مختصات موازی

$$x' = x - a, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{۲.۱۱}$$

حالا برای تکمیل تحلیل‌مان لازم است بدانیم این اختلاف انتخاب مبداء چه تاثیری در اندازه‌گیری نیروها برای مراد خواهد گذاشت. به‌طور طبیعی این نیرو در امتداد یک راستای مشخص عمل می‌کند و منظور ما از نیرو در راستای x، آن بخشی از برآیند نیروهاست که به‌طور مؤثر در راستای x اثر می‌کند و به‌صورت ریاضیاتی با اندازه‌ی نیرو ضربدر کسینوس زاویه‌ی θ مشخص می‌شود که زاویه‌ی θ زاویه‌ی بین نیرو و راستای x است. اکنون می‌توان نشان داد که مراد دقیقاً از همان معادلاتی استفاده می‌کند که جواد استفاده کرده است. بنابراین نشان خواهیم داد:

$$F_{x'} = F_x, \qquad F_{y'} = F_y, \qquad F_{z'} = F_z. \tag{۳.۱۱}$$

این‌ها روابطی هستند که بین معادلات اندازه‌گیری شده توسط مراد و جواد برقرارند.

حالا سوال این است که با فرض برقراری معادلات نیوتن برای جواد، مراد هم این معادلات را به همان صورتی که برای جواد صادقند خواهد دید؟ یا به عبارت دیگر، آیا انتخاب مبداءهای متفاوت برای اندازه‌گیری‌ها، تغییری در معادلات نیوتن به وجود خواهند آورد؟ به بیان ریاضیاتی، سوال این است که اگر معادلات (۱.۱۱) صحیح باشند و معادلات (۲.۱۱) و (۲.۱۱) رابطه‌ی بین پارامترها را به ما بدهند، آیا معادلات زیر صحیح خواهند بود یا خیر؟

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad m(d^۲x'/dt^۲) = F_{x'}, \\ &\text{(b)} \quad m(d^۲y'/dt^۲) = F_{y'}, \\ &\text{(c)} \quad m(d^۲z'/dt^۲) = F_{z'}. \end{aligned} \tag{۴.۱۱}$$

برای تست کردن این مسئله باید دو مرتبه از x' نسبت به زمان مشتق بگیریم. مشتق اول خواهد بود:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}(x-a) = \frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt}.$$

و با فرض اینکه مبداء اندازه‌گیری‌های مراد ثابت است و نسبت به جواد حرکت نمی‌کند، بنابراین a یک ثابت است و مشتق زمانی آن صفر خواهد بود و بنابراین خواهیم داشت:

$$dx'/dt = dx/dt$$

و همین مسئله نتیجه خواهد داد:

$$d^۲x'/dt^۲ = d^۲x/dt^۲;$$

و از آنجایی که از معادله‌ی

$$m(d^۲x/dt^۲) = F_{x'}.$$

(و با فرض اینکه جرم‌های اندازه‌گیری شده توسط مراد و جواد یکسان باشد)، بنابراین نتیجه‌ی ضرب شتاب در جرم اندازه‌گیری شده توسط هر دو نفر برابر خواهد بود. به این ترتیب ما در این‌جا یک رابطه برای $F'(x)$ به‌دست آورده‌ایم. حال با صدق معادله‌ی (۴.۱۱) در (۱.۱۱) خواهیم داشت:

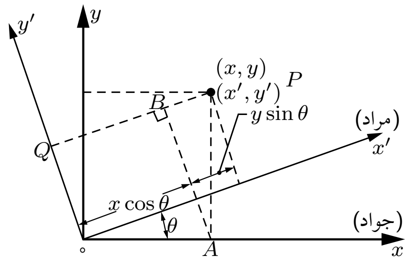
$$F_{x'} = F_x.$$

بنابراین معادلاتی که مراد به‌دست می‌آورد با معادلات به‌دست آمده توسط جواد یکسان خواهند بود و در نتیجه معادلات نیوتن در دستگاه مختصات مراد هم صادق خواهند بود. این مسئله بدان معناست که روش یکتایی برای تعیین مبداء اندازه‌گیری‌های جهان وجود ندارد و معادلات نیوتن مستقل از انتخاب مبداء‌های اندازه‌گیری هستند.

به این ترتیب صحت ادعای یکسانی عملکرد یک ماشین در نقطه مشخص از فضا با عملکرد آن در نقطه دیگر اثبات خواهد شد. چرا که با توجه به استدلالات قبلی، معادلاتی که بر دستگاه مورد بررسی در مکان مراد حاکم است دقیقاً همان معادلاتی هستند که بر دستگاه بررسی شده در مکان جواد حاکم‌اند و یکسانی معادلات به معنای یکسانی عملکرد دو دستگاه هستند. بنابراین اثبات این ادعا که جابه‌جا کردن یک دستگاه در فضا تاثیری در عملکرد آن نمی‌گذارد با توجه به این واقعیت صورت گرفت که معادلات نیوتن با جابه‌جا شدن مبداء محاسبات در فضا عوض نمی‌شوند و به همین دلیل می‌گوییم که معادلات فیزیک تحت تبدیلات انتقال متقارن هستند و متقارن بودن در این‌جا به معنای آن است که قوانین با جابه‌جا شدن دستگاه مختصات ما تغییر نمی‌کنند. هر چند این موضوع تا حدود خوبی با شهود ما سازگار است اما مشاهده‌ی استدلال ریاضی توضیح دهنده این مسئله هم جذابیت‌های خود را دارد.

۳.۱۱ دَوران‌ها

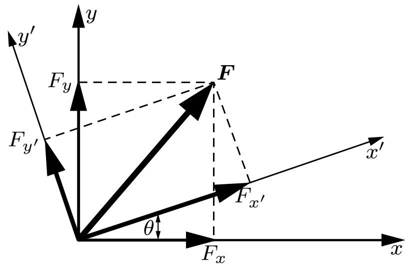
مسئله‌ی بررسی شده در بخش قبل قدم اول ما برای بررسی تبدیل‌های پیچیده‌تری است که برای آن‌ها قوانین فیزیکی بدون تغییر باقی می‌مانند. قدم بعدی ما آن است که نشان دهیم تغییر جهت پایه‌های مختصات هم تغییری در قوانین ما ایجاد نمی‌کنند. به عبارت دیگر اگر ما یک ماشین را در یک مکان مشخص به کار بیندازیم و در مکانی نزدیک به آن یک دستگاه مشابه دیگر را با زاویه‌ای دیگر نسبت به دستگاه اول به کار بیندازیم، آیا این دو دستگاه رفتار یکسانی خواهند داشت؟ بدیهی است که اگر برای مثال این دستگاه ساعت دیواری پدربزرگتان باشد اینطور نخواهد بود! اگه یک ساعت دیواری آونگی در حالت مستقیم و قائم قرار داشته باشد به درستی کار خواهد کرد اما اگر ساعت را به یک سمت کج کنیم به‌طوری که پاندول آن روی یکی از دیواره‌های کناری ساعت قرار بگیرد، ساعت دیگر کار نخواهد کرد. در این حالت اگر ما زمین را به عنوان عامل مؤثر در رفتار ساعت در نظر نگیریم، ادعای ما درست نخواهد بود. در این وضعیت اگر به صحت تقارن دورانی در قوانین فیزیکی اعتقاد داریم، می‌توان یک حدس مهم درباره مسئله‌ی ساعت زد: در کنار ساختار مکانیکی داخلی ساعت، چیزی دیگری هم در عملکرد آن دخالت دارد. چیزی در خارج از خود ساعت که باید آن را پیدا کنم. از طرف دیگر می‌توان حدس زد که احتمالاً ساعت ما در جایی به



شکل ۲.۱۱: دو دستگاه مختصات با دو جهت‌گیری زاویه‌ای متفاوت

دور از این منبع ناشناخته (که شاید زمین باشد) دیگر کار نخواهد کرد. به‌علاوه می‌دانیم که یک ساعت پاندول‌دار بر روی یک ماهواره و به دور از زمین کار نمی‌کند، چرا که در آن وضعیت هیچ نیروی مؤثری بر آن وارد نمی‌شود و در حالتی دیگر، هنگامی که ساعت را بر روی مریخ قرار داده‌ایم، آهنگ حرکت آن نسبت به آهنگ حرکتش بر روی زمین متفاوت خواهد بود. این مثال‌ها ادعای ما را درباره وجود عامل مؤثری به غیر از ساختار داخلی خود ساعت که در رفتار فیزیکی آن مؤثر است نشان می‌دهد. وقتی این عامل را پیدا کردیم، درخواهیم یافت که برای درست کار کردن ساعت لازم است آن را هم (که حدس می‌زدیم زمین باشد) همراه با ساعت دوران دهیم. خیلی هم لازم نیست تا نگران این مسئله باشیم. صرفاً کافیست چند لحظه‌ای صبر کنیم تا زمین بچرخد و سپس ساعت نسبت به زمین در موقعیت قبلی قرار می‌گیرد و مثل قبل بدون مشکل شروع به کار کردن می‌کند! با چرخیدن ما در فضا زوایا هم به‌طور بدیهی عوض می‌شوند. به نظر می‌رسد این تغییر برای ما آن‌چنان مسئله‌ی دردسرسازی نیست چرا که در حالت جدید، وضعیت ما از نظر فیزیکی فرقی با وضعیت قبلی نخواهد داشت. این اتفاق می‌تواند ما را بسیار سردرگم کند؛ چرا که آنچه از نظر فیزیکی درست است این مسئله است که قوانین فیزیکی در قبل و بعد از دوران یکسانند، نه اینکه قوانین برای یک سیستم ساکن و یک سیستم درحال چرخش یکسانند. اگر ما آزمایش‌های دقیق انجام دهیم می‌توانیم ادعا کنیم که زمین در حال چرخیدن است، نه آن‌که زمین (نسبت به حالت قبلی) چرخیده است. به عبارت دیگر، ما نمی‌توانیم مختصات دورانی آن را به‌صورت یکتا مشخص کنیم، اما می‌توانیم بگوییم این مختصات در حال عوض شدن هستند.

حال می‌خواهیم تاثیر جهت‌گیری مختصات زاویه‌ای را بر روی قوانین فیزیکی بررسی کنیم. بیایید درباره‌ی این موضوع حرف بزنیم که آیا بازی قبلی‌ای که با جواد و مراد در انتقال دستگاه مختصات انجام دادیم در مورد دوران هم کارگر است یا خیر. این بار از پیچیدگی‌های غیرضروری صرف‌نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم جواد و مراد مبداءهای یکسانی دارند (یادمان باشد قبلاً نشان دادیم که می‌توانیم مبداء مختصات را به‌وسیله‌ی انتقال جابه‌جا کنیم و هیچ اتفاق خاصی رخ ندهد). فرض کنید محور مختصات مراد به اندازه θ درجه نسبت به مختصات جواد دوران داده شده است. این دو دستگاه مختصات در شکل ۲.۱۱ نشان داده شده‌اند که در این‌جا به دستگاه‌های مختصات دو بعدی محدود شده‌اند. یک نقطه‌ی دلخواه P در فضا در نظر بگیرید که در دستگاه جواد دارای مختصات (x,y) و در دستگاه مراد دارای مختصات (x',y') باشد. مانند حالت قبل سعی می‌کنیم x' و y' را بر حسب x و y و θ بنویسیم. برای این کار در ابتدا چهار خط به‌طور عمود از نقطه P به هر چهار محور موجود رسم می‌کنیم و AB را عمود بر PQ رسم می‌نماییم. با دقت در شکل خواهیم فهمید که می‌توانیم x' را به‌صورت جمع دو طول در راستای x' و y' را به‌صورت تفاضل دو طول در راستای AB بنویسیم. همه‌ی این طول‌ها برحسب x، y و θ در معادلات (۵.۱۱) مشخص شده‌اند



شکل ۳.۱۱: مؤلفه‌های نیرو در دو سیستم

و ما معادله‌ی سوم را هم برای نمایش دادن رابطه‌ی بعد سوم اضافه کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' &= y\cos\theta - x\sin\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{۵.۱۱}$$

قدم بعدی آن است که با استفاده از روش قبلی، رابطه‌ی میان نیروهای مشاهده شده توسط دو ناظر را تحلیل کنیم. باتوجه به شکل ۲.۱۱، بیاید فرض کنیم که از منظر جواد یک نیروی F که از قبل آن را به دو مؤلفه‌ی F_x و F_y تجزیه کرده‌ایم، به یک جسم به جرم m که در مکان P قرار دارد وارد می‌شود. برای راحتی فرض کنید هر دو دستگاه مختصات را طوری جابه‌جا کنیم که مانند شکل ۳.۱۱ مبداء به نقطه P جابه‌جا شود. مراد مؤلفه‌های نیروی F را در دستگاه خودش به‌صورت $F_{x'}$ و $F_{y'}$ می‌بیند. F_x در هر دو راستای x' و y' دارای مؤلفه است. به‌طور مشابه F_x هم به همین ترتیب. برای برای نمایش $F_{x'}$ برحسب F_x و F_{xy} ما این دو مؤلفه را در راستای x' با هم جمع می‌کنیم و به‌طور مشابه همین کار را برای $F_{y'}$ برحسب F_x و F_{xy} انجام می‌دهیم. نتایج به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x\cos\theta + F_y\sin\theta, \\ F_{y'} &= F_y\cos\theta - F_x\sin\theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \tag{۶.۱۱}$$

در این‌جا لازم است تا به این نکته‌ی مهم اشاره کنیم که (۵.۱۱) و (۶.۱۱) به ترتیب برای مؤلفه‌های P و مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ به صورت یکتا نمایش داده می‌شوند.

مانند قبل فرض می‌کنیم که معادلات نیوتن در دستگاه جواد درست باشند و به‌وسیله‌ی معادله‌ی (۱.۱۱) نمایش داده شوند. سؤال مانند قبل آن است که آیا مراد هم می‌تواند از معادلات نیوتن استفاده کند و آیا معادلات نیوتن برای دستگاه مختصات چرخیده‌ی او هم صادق است؟ به عبارت دیگر اگر فرض کنیم معادلات (۵.۱۱) و (۶.۱۱) رابطه‌ی بین کمیت‌های اندازه‌گیری شده را به‌درستی نشان می‌دهند، آیا عبارات زیر نیز صادقند؟

$$\begin{aligned} m(d^۲x'/dt^۲) &= F_{x'}, \\ m(d^۲y'/dt^۲) &= F_{y'}, \\ m(d^۲z'/dt^۲) &= F_{z'}. \end{aligned} \tag{۷.۱۱}$$

برای چک کردن این تساوی، طرفین معادلات را به طور مستقل محاسبه می‌کنیم و نتایج را با هم مقایسه می‌کنیم. برای محاسبه‌کردن سمت راست، معادلات (۵.۱۱) را در m ضرب می‌کنیم و با فرض ثابت بودن θ، دو بار نسبت به زمان از معادله (۵.۱۱) مشتق می‌گیریم.

$$\begin{aligned} m(d^2x'/dt^2) &= m(d^2x/dt^2)\cos\theta + m(d^2y/dt^2)\sin\theta, \\ m(d^2y'/dt^2) &= m(d^2y/dt^2)\cos\theta - m(d^2x/dt^2)\sin\theta, \\ m(d^2z'/dt^2) &= m(d^2z/dt^2). \end{aligned} \tag{۸.۱۱}$$

سمت راست معادلات (۷.۱۱) را با جای‌گذاری در معادلات (۱.۱۱) در (۶.۱۱) به‌دست می‌آوریم. نتیجه به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} F_{x'} &= m(d^2x/dt^2)\cos\theta + m(d^2y/dt^2)\sin\theta, \\ F_{y'} &= m(d^2y/dt^2)\cos\theta - m(d^2x/dt^2)\sin\theta, \\ F_{z'} &= m(d^2z/dt^2). \end{aligned} \tag{۹.۱۱}$$

حواستان باشد! سمت راست معادلات (۸.۱۱) و (۹.۱۱) یکی هستند پس بدین نتیجه رسیدیم که اگر معادلات نیوتن در یک دستگاه مختصات صادق باشند، در هر دستگاه دیگر دوران یافته هم صادقند. نتیجه‌ای که اکنون برای هر دو حالت انتقال و دوران محورها اثبات شد، پیامدهای مشخصی دارد. اول آنکه هیچ‌کس نمی‌تواند ادعای منحصربه‌فرد بودن دستگاه مختصاتش را داشته باشد، هرچند می‌توان برای راحتی محاسبات در مسئله‌های مشخص دستگاه‌های خاصی را انتخاب کرد. برای مثال معمولاً گرانش را در راستای یکی از محورهای مختصات فرض می‌کنیم، هرچند این کار ضرورت فیزیکی ندارد. دوم، اگر یک مجموعه را که از نظر فیزیکی کامل است و برای کار کردن احتیاجی به هیچ عامل فیزیکی بیرونی ندارد، دوران دهیم، هیچ تغییری در رفتار فیزیکی آن به‌وجود نخواهد آمد.

۴.۱۱ بردارها

نه تنها قوانین نیوتن بلکه تمامی قوانین فیزیکی‌ای که تا الان می‌شناسیم هر دو ویژگی ناوردایی (یا تقارن) تحت انتقال و دوران را محترم می‌شمارند. این ویژگی‌ها به قدری مهم هستند که برای استفاده از مزیت آن‌ها در نوشتن قوانین فیزیکی یک روش ریاضیاتی به‌خصوص ابداع و به‌کار گرفته شده است.

مسیری که در ادامه برای تحلیل این مسئله به آن خواهیم پرداخت، شامل مقادیر قابل توجهی از محاسبات ریاضیاتی کسالت آور است. برای آنکه جزئیات این محاسبات کسالت‌بار را تا حد ممکن کاهش دهیم، یک چارچوب بسیار قدرتمند ریاضیاتی در دسترس قرار دارد. این مکانیسم که با نام تحلیل برداری[۳] شناخته می‌شود عنوان این بخش از مباحث ماست که در واقع با هدف بررسی مسئله‌ی تقارن سیستم‌های فیزیکی آورده شده است. با روش‌هایی که در بخش‌های قبل برای تحلیل استفاده کردیم، توانستیم تمامی نتایج دلخواهمان را به‌دست آوریم اما در عمل دوست داریم که نتایج را سریع‌تر و راحت‌تر به‌دست آوریم. دلیل استفاده‌ی ما از روش بردارها همین است.

[3] Vector Analysis

ما با اشاره به تعدادی از خصوصیات دو کمیت مهم فیزیکی شروع می‌کنیم (قاعدتاً کمیت‌های مهم از دو تا بیشتر هستند اما اجازه بدهید علی‌الحساب همین دو مورد را در نظر بگیریم). اولین کمیت، کمیتی مانند تعداد سیب‌زمینی‌های داخل یک کیسه است که به آن یک کمیت عادی، کمیت بدون جهت و یا اسکالر[۴] می‌گوییم. دما یک مثال از این گونه کمیت‌هاست. کمیت‌های دیگری که در فیزیک دارای اهمیت‌اند، کمیت‌های دارای جهت هستند. مثلاً سرعت. وقتی یک جسم دارای سرعت است، علاوه بر عدد سرعت، جهتی هم که آن جسم با آن سرعت در حال حرکت است دارای اهمیت است.هم‌چنین نیرو، تکانه و جابه‌جایی. وقتی کسی از یک نقطه به یک نقطه‌ی دیگر حرکت می‌کند، می‌توانیم از میزان دور شدنش حرف بزنیم، اما اگر بخواهیم بدانیم دقیقاً به کجا رفته است، باید جهت حرکت را هم مشخص کنیم.

همه‌ی کمیت‌هایی که جهت دارند مانند جابه‌جا شدن در فضا، بردار[۵] نامیده می‌شوند.

هر برداری شامل سه عدد است. برای مشخص کردن یک قدم در فضا، برای مثال قدمی که از مبداء مختصات شروع می‌شود و تا نقطه‌ی P که مختصات آن به صورت (x, y, z) است ادامه پیدا می‌کند، به سه عدد احتیاج داریم. با این حال قصد داریم تا یک نماد ریاضیاتی مشخص، $\mathbf{r}$، معرفی کنیم که مشابه هیچ یک از نمادهای ریاضیاتی‌ای که تا کنون استفاده کرده‌ایم نیست[۶]. این نماد نشان‌دهنده‌ی یک عدد نیست، در واقع به‌طور همزمان نشان‌دهنده‌ی سه عدد x، y و z است. و باید توجه داشت که این سه عدد اعداد مشخصی نیستند. به عبارت دیگر اگر از یک دستگاه مختصات متفاوت در نمایش بردار $\vec{r}$ استفاده کنیم، این سه عدد به سه عدد جدید x'، y' و z' تبدیل خواهند شد. اما از آنجایی که ما می‌خواهیم تا جای ممکن از نمادگذاری‌های ساده‌تری استفاده کنیم، برای نمایش هر دو سه‌تایی (x, y, z) و (x', y', z') از نماد یکسان $\mathbf{r}$ استفاده می‌کنیم. این کار داری این مزیت است که اگر دستگاه مختصات خود را عوض کنیم، احتیاجی نیست تا نمادگذاری معادلات را تغییر دهیم. اگر معادلات خود را بر حسب x، y، z بنویسیم و سپس دستگاه مختصاتمان را به نحوی تغییر دهیم باید معادلات را برحسب پارامترهای جدید x'، y'، z' بازنویسی کنیم. اما در ازای همه این‌ها صرفاً از نماد $\mathbf{r}$ استفاده می‌کنیم با این قرارداد که این نماد در یک دستگاه نماینده‌ی (x', y', z') و در دستگاه دیگر نماینده‌ی x'، y'، z' می‌باشد. سه عددی که نمایش‌دهنده‌ی یک کمیت برداری در دستگاه مختصات مشخص هستند، "مؤلفه[۷]"های بردار در جهت بردارهای پایه‌ی آن دستگاه مختصات نامیده می‌شوند. دقیقاً به همین دلیل است که ما برای سه عدد از یک نماد استفاده می‌کنیم، چرا که در واقع آن سه عدد نمایش‌دهنده‌ی یک موجود فیزیکی یکسان هستند که در دستگاه‌های مختصات مختلف دارای نمایش‌های متفاوتند. دلیل اینکه در این‌جا می‌توانیم از عبارت یک "موجود یکسان" استفاده کنیم شهود فیزیکی ما در رابطه با واقعیت وجود داشتن یک قدم در فضاست که ماهیت آن مستقل از دستگاه مختصاتی است که ما این موجود را در آن اندازه‌گیری می‌کنیم. بنابراین نماد $\vec{r}$ نمایش‌دهنده‌ی یک موجود واحد است، بدون درنظر گرفتن اینکه دستگاه مختصات ما در چه امتدادی جهت‌گیری کرده است.

حالا فرض کنید که یک کمیت فیزیکی جهت‌دار دیگر مانند نیرو که آن هم با سه عدد نمایش داده می‌شود وجود دارد که اگر دستگاه مختصات خود را بچرخانیم، این سه عدد تحت یک رابطه‌ی ریاضیاتی مشخص به سه عدد دیگر تبدیل می‌شوند. قانونی که این سه عدد را به سه عدد جدید تبدیل می‌کند باید

---

[4] scalar

[5] vector

[6] در متن‌های تایپ شده برای نشان دادن بردارها از حروف درشت Bold استفاده می‌کنیم. در درست نویس‌ها معمولاً از یک بردار بالای آن حرف برای نشان دادن ماهیت برداری استفاده می‌شود $\vec{r}$

[7] component

مشابه قانون تبدیل سه عدد (x', y', z') به (x', y', z') باشد. به عبارت دیگر اگر مؤلفه‌های یک کمیت فیزیکی که به سه عدد نمایش داده می‌شود، تحت انتقال مختصات مانند مؤلفه‌های یک قدم در فضا تبدیل شوند، آن کمیت یک بردار محسوب می‌شود. در نتیجه اگر یک معادله مانند

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$$

در یک دستگاه مختصات صادق باشد، در هر دستگاه مختصات دیگری هم صادق است. معادله‌ی تک‌پارامتری بالا در واقع نمایش کوتاه‌شده‌ی سه معادله‌ی زیر است:

$$F_x = x, \qquad F_y = y, \qquad F_z = z,$$

یا به طور معادل

$$F_{x'} = x', \qquad F_{y'} = y', \qquad F_{z'} = z'.$$

این حقیقت که می‌توان روابط فیزیکی را در قالب معادلات برداری بیان کرد متضمن این مسئله است که روابط حاکم بر کمیت‌های فیزیکی تحت دوران خالص دستگاه مختصات عوض نمی‌شوند.

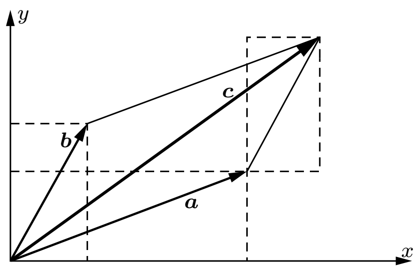
حالا بیایید چند ویژگی از بردارها را بررسی کنیم. به عنوان مثال می‌توانیم به سرعت، تکانه و یا نیرو اشاره کنیم. برای بسیاری از موارد مناسب است تا بردار را به‌وسیله‌ی یک پیکان که جهت بردار را نشان می‌دهد مشخص کنیم. ممکن است کسی بپرسد چرا می‌توانیم یک نیرو را به وسیله‌ی پیکان نمایش دهیم؟ جواب آن است که یک پیکان هم دقیقاً همان گونه توسط روابط ریاضییاتی تبدیل می‌شود که "یک قدم در فضا" تبدیل می‌شود. به همین خاطر می‌توانیم اینطور تصور کنیم که هر قدم در فضا برابر با مقدار خاصی از نیرو است. به این ترتیب یک معادله مانند

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{r},$$

با فرض ثابت بودن k که نسبت میان آن قدم و نیرو را تعیین می‌کند، یک معادله‌ی معنادار خواهد بود. به این ترتیب قادر خواهیم بود تا در همه‌ی موارد نیروها را به‌وسیله‌ی خط‌ها (بردارها) نشان دهیم که انتخاب بسیار ساده‌تری است. چرا که بار اولی که یک خط را کشیدیم دیگر احتیاجی به تعیین کردن محورهای مختصات نخواهیم داشت. به‌طور اصولی به‌وسیله‌ی محاسبات هندسی به راحتی می‌توانیم تحت هر دورانی مؤلفه‌های بردار را به‌دست آوریم.

۵.۱۱ جبر برداری

حالا وقت آن رسیده است تا قوانین و روابط حاکم بر ترکیب بردارها را بررسی کنیم. اولین روش ترکیب بردارها جمع دو بردار است: فرض کنید که $\mathbf{a}$ یک بردار است که در یک دستگاه مختصات دارای مؤلفه‌های (a_x, a_y, a_z) است و $\mathbf{b}$ برداری دیگر است با مؤلفه‌های (b_x, b_y, b_z) حالا بیایید سه عدد جدید به‌صورت $(b_x + a_x, b_y + a_y, b_z + a_z)$ بسازیم و این سؤال را بپرسیم که آیا این سه عدد در کنار هم یک بردار را نشان می‌دهند؟ احتمالاً با خودتان می‌گویید عجب سوال بیخودی! خب معلوم است هر سه عدد کنار هم یک بردار را نشان می‌دهند دیگر! اما در حقیقت این‌طور نیست. هر سه عدد دلخواه کنار هم به‌تنهایی یک بردار را نشان نمی‌دهند. برای آنکه سه عدد نشان‌دهنده‌ی یک بردار باشند، این سه عدد باید منتسب به یک دستگاه مختصات باشند به‌صورتی که وقتی ما دستگاه مختصات را بچرخانیم، این سه طبق قوانینی که در



شکل ۴.۱۱: جمع بردارها

قبل آنها را بررسی کردیم با هم ترکیب شوند. بنابراین در واقع سؤال ما این است که اگر دستگاه مختصات را بچرخانیم، به‌صورتی که (a_x, a_y, a_z) به $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ و (b_x, b_y, b_z) به $(b_{x'}, b_{y'}, b_{z'})$ تبدیل شود، آن وقت چه بلایی بر سر $(b_x+a_x, b_y+a_y, b_z+a_z)$ خواهد آمد؟ آیا آن هم به $(b_{x'}+a_{x'}, b_{y'}+a_{y'}, b_{z'}+a_{z'})$ تبدیل خواهد شد؟ جواب مثبت است! چرا که معادله‌ی (۵.۱۱) متعلق به خانواده‌ی معادله‌هایی است که ما به آن‌ها تبدیلات خطی می‌گوییم. اگر ما آن تبدیلات را به a_x و b_x اعمال کنیم و $b_{x'} + a_{x'}$ را به‌دست آوریم، خواهیم دید که تبدیل‌یافته‌ی $a_x + b_x$ هم به $b_{x'} + a_{x'}$ خواهد شد. به این ترتیب وقتی بردارهای **a** و **b** به این معنا با هم ترکیب شوند آن را جمع دو بردار می‌نامیم که بردار جدیدی می‌سازند و آن را با نماد **c** نشان می‌دهیم و به صورت ریاضیاتی این‌طور تعریفش می‌کنیم:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

به راحتی با توجه به مؤلفه می‌توان دید که

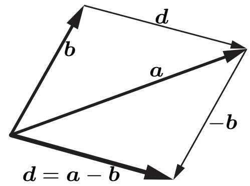
$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a},$$

همچنین

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}.$$

که به این معناست که می‌توان با هر ترتیبی بردارها را با یکدیگر جمع کرد.

اما از نظر هندسی جمع دو بردار چگونه است؟ فرض کنید **a** و **b** دو خط راست بر روی یک صفحه کاغذ باشند. آن وقت **c** چه شکلی خواهد بود؟ این موضوع در شکل ۴.۱۱ نشان داده شده است: اگر مستطیل‌هایی را که نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌های بردارهای **a** و **b** هستند رسم کنیم، مطابق شکل می‌توان دید که می‌توانیم مؤلفه‌های **a** را با مؤلفه‌های متناظر **b** جمع کنیم. در روش دیگر می‌توانیم انتهای بردار **a** را به ابتدای بردار **b** وصل کنیم. آنگاه برداری که از ابتدای **a** به انتهای بردار **b** کشیده می‌شود همان بردار **c** است. طبیعتاً اگر این عملیات را جابه‌جا انجام دهیم و انتهای بردار **b** را به ابتدای بردار **a** وصل کنیم بنابر خواص متوازی‌الاضلاع‌ها نتیجه با حالت قبلی یکسان خواهد بود و در این حالت هم بردار رسم شده از ابتدای بردار **b** به انتهای بردار **a** کنیم، مجدداً بردار **c** به‌دست خواهد آمد. نکته‌ی جالب آن است که در این روش بدون اینکه احتیاجی به دستگاه مختصات خاصی داشته باشیم می‌توانیم نتیجه جمع دو بردار را به‌دست آوریم.



شکل ۵.۱۱: تفاضل بردارها

حالا بیایید درباره‌ی این حرف بزنیم که معنی ضرب کردن یک عدد مانند α در یک بردار چیست؟ ما این ضرب را به صورت یک بردار تعریف می‌کنیم که مؤلفه‌هایش به صورت αa_x، αb_x و αa_z باشد. اثبات اینکه این مؤلفه‌ها واقعاً تشکیل یک بردار می‌دهند را به خوانندگان جان واگذار می‌کنیم.

حالا بیایید درباره‌ی تفریق دو بردار حرف بزنیم. تفریق دو بردار را هم درست مانند جمع بردارها تعریف می‌کنیم، با این تفاوت که به جای جمع کردن مؤلفه‌ها، آن‌ها را از هم کم می‌کنیم. در ضمن می‌توانیم تفریق را به‌وسیله‌ی معرفی بردار $-b = -1b$ و سپس جمع کردن بردارها معرفی کنیم؛ هر دو روش جواب یکتایی را به‌دست می‌دهند. نتیجه در شکل ۵.۱۱ نشان داده شده است. این شکل نتیجه‌ی $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ را نشان می‌دهد؛ ضمناً باید اشاره کنیم که تفاضل $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ به‌راحتی به‌وسیله‌ی معادله‌ی هم‌ارز آن $\mathbf{a} + \mathbf{d} = \mathbf{b}$ به‌دست می‌آید. به این ترتیب پیدا کردن تفاضل به‌صورت هندسی در این حالت بسیار راحت‌تر از حالت قبل است. فقط کافی است برداری که از ابتدای $\mathbf{b}$ به ابتدای $\mathbf{a}$ می‌رود را رسم کنیم. این بردار همان بردار $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ خواهد بود.

در قدم بعدی درباره‌ی سرعت حرف خواهیم زد. اولین سؤال اینکه چرا سرعت، یک بردار است؟ اگر مکان به‌وسیله‌ی یک بردار سه مؤلفه‌ای (x, y, z) نمایش داده شود، آن گاه سرعت چه خواهد بود؟ سرعت با مؤلفه‌های dx/dt، dy/dt و dz/dt تعیین می‌شود. و حالا سؤال این است که آیا این سه‌تایی جدید یک بردار است؟ با مشتق گرفتن از عبارت (۵.۱۱) می‌توانیم بررسی کنیم که آیا dx'/dt مانند بردارها تبدیل می‌شوند یا نه. با انجام این کار خواهیم دید که مؤلفه‌های dx/dt و dy/dt درست مانند x و y تبدیل می‌شوند بنابراین سرعت هم یک بردار است. می‌توانیم بردار سرعت را به‌صورت جالب

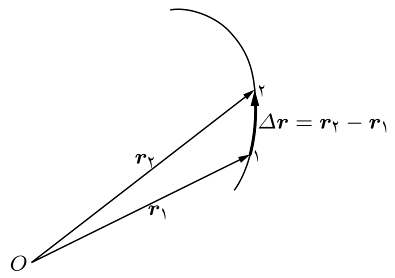
$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt.$$

تعریف کنیم. اینکه سرعت چه چیز است و اینکه چرا آن را یک سرعت به‌حساب می‌آوریم را می‌توان به‌صورت شهودی نیز توضیح داد. یک ذره در بازه‌ی زمانی کوتاه Δt چه مکانی را طی می‌کند؟ جواب: $\Delta \mathbf{r}$! بنابراین اگر یک ذره در یک لحظه این‌جا باشد و در زمان دیگر آنجا، تفاضل بین این دو مکان $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_۲ - \mathbf{r}_۱$ که با توجه به شکل ۶.۱۱ جهت حرکت است، تقسیم بر بازه زمانی حرکت $\Delta t = t_۲ - t_۱$ سرعت میانگین تعریف می‌شود.

در بیان دیگر، منظور ما از بردار سرعت، حد عبارت بالاست وقتی Δt به سمت ۰ میل می‌کند.

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to ۰} (\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t) = d\boldsymbol{r}/dt. \qquad (۱۰.۱۱)$$

به این ترتیب سرعت یک بردار است، برای اینکه از تفاضل دو بردار به‌دست آمده است. از طرفی این تعریف یک تعریف مناسب برای سرعت است چرا که مؤلفه‌هایش dx/dt، dy/dt و dz/dt هستند. در حقیقت ما از این بحث به این نتیجه می‌رسیم که تقسیم بردار جابه‌جایی بر زمان یک بردار جدید تولید



شکل ۶.۱۱: جابه‌جایی یک ذره در فاصله‌ی زمانی کوتاه $\Delta t = t_۲ - t_۱$.

خواهد کرد. به این ترتیب ما روش‌های مختلفی برای ساختن بردارها داریم. یکی به‌وسیله‌ی ضرب در یک عدد ثابت، دیگری تقسیم کردن بر زمان و در نهایت جمع و تفریق بردارها.

۶.۱۱ قوانین نیوتن در نمایش برداری

برای نوشتن قوانین نیوتن در شکل برداری تنها کافیست یک قدم دیگر برداریم و بردار شتاب را تعریف کنیم. بردار شتاب مشتق زمانی بردار سرعت است و بهتر است آن را با مشتقات مرتبه‌ی دوم x، y و z نسبت به زمان نشان دهیم.

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d^۲\boldsymbol{r}}{dt^۲}, \tag{۱۱.۱۱}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^۲x}{dt^۲}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^۲y}{dt^۲}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^۲z}{dt^۲}. \tag{۱۲.۱۱}$$

با این تعریف می‌توانیم قوانین نیوتن را به‌صورت زیر بنویسیم:

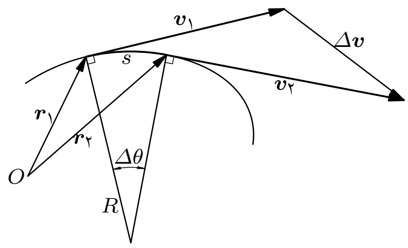
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{۱۳.۱۱}$$

یا

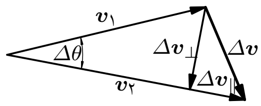
$$m(d^۲\boldsymbol{r}/dt^۲) = \boldsymbol{F}. \tag{۱۴.۱۱}$$

حالا مسئله‌ی اثبات ناوردایی قوانین نیوتن تحت دوران محورهای مختصات به این صورت است: اثبات کنید که **a** یک بردار است؛ این کاری است که همین پیش پای شما انجام دادیم! سپس باید ثابت کنیم که **F** یک بردار است؛ فرض می‌کنیم که باشد. با این فرض و با توجه به اینکه می‌دانیم شتاب یک بردار است، معادله‌ی (۱۳.۱۱) در تمامی دستگاه‌های مختصات به همان صورت بالاست. نوشتن این معادله به صورتی که به‌صورت صریح شامل x، y و z ها نباشد دارای این مزیت است که برای هر بار نوشتن معادلات نیوتن یا هر معادله‌ی برداری دیگری، لازم نیست تا سه معادله را تکرار نماییم. چیزی که ما می‌نویسیم در ظاهر یک معادله به نظر می‌آید درحالی‌که نشان‌دهنده‌ی سه معادله‌ی مجزا برای هر مجموعه محورهای مختصات دلخواه است چرا که هر معادله‌ی برداری بیانگر معادل بودن هر یک از مؤلفه‌های طرفین است.

این حقیقت که شتاب، آهنگ تغییر بردار سرعت است به ما کمک می‌کند تا آن را با یک مسیر تقریباً پیچیده به‌دست آوریم. برای مثال فرض کنید که یک ذره بر روی یک مسیر پیچیده مانند شکل ۷.۱۱ حرکت



شکل ۷.۱۱: یک مسیر خمیده



شکل ۸.۱۱: نمودار محاسبه‌ی شتاب

می‌کند و در زمان t_1 دارای سرعت معین v_1 است و وقتی به‌مقدار کمی در زمان پیش می‌رویم و به زمان t_2 می‌رسیم دارای سرعت v_2 می‌باشد. حال سؤال این‌جاست که شتاب چقدر است؟ و جواب این است که شتاب، تفاضل بین سرعت‌ها تقسیم بر بازه‌ی کوتاه زمانی است. بنابراین لازم است تا تفاضل دو بردار سرعت را به‌دست آوریم. حالا چطور باید این کار را انجام دهیم؟ همانطور که قبلاً درباره‌اش صحبت کردیم، برای به‌دست آوردن تفاضل دو بردار، انتهای دو بردار را به‌هم وصل می‌کنیم. این‌طور به‌نظر می‌آید که این بردار Δv، اختلاف بین دو بردار باشد، درحالی‌که چنین نیست. این حرف زمانی درست است که ابتدای دو بردار در یک نقطه قرار داشته باشد. این که بردارهایمان را به مکان‌های دلخواه انتقال دهیم و به‌وسیله‌ی یک خط انتهای آن‌ها را به‌هم وصل کنیم و بعد ذوق زده شویم که وای! نگاه کنید! ما به یک روش جدید در به‌دست آوردن تفاضل دو بردار رسیده‌ایم! کار درستی نیست. در شکل ۸.۱۱، v_1 و v_2 هر دو موازی و هم‌اندازه‌ی بردارهای همتای خود در شکل ۷.۱۱ رسم شده‌اند و در این حالت ما می‌توانیم شتاب را مورد بحث قرار دهیم. در کلام ساده، شتاب به صورت $\Delta v/\Delta t$ تعریف می‌شود. جالب است اشاره کنیم که می‌توانیم تفاضل دو بردار سرعت را از دو بخش به‌دست آوریم. همانطور که در شکل ۸.۱۱ نشان داده شده است می‌توانیم مؤلفه‌های شتاب را به دو مؤلفه‌ی موازی با مسیر $\Delta v_\parallel$ و عمود بر مسیر $\Delta v_\perp$ تقسیم کنیم. شتاب مماسی بر مسیر، حاصل تغییر در طول بردار است یعنی تغییر در اندازه سرعت:

$$a_\parallel = dv/dt. \tag{۱۵.۱۱}$$

مؤلفه‌ی مماسی شتاب نسبت به خم به‌راحتی به‌وسیله‌ی شکل‌های ۷.۱۱ و ۸.۱۱ قابل محاسبه است. فرض کنید در یک زمان کوتاه Δv تغییر زاویه بین بردار v_1 و v_2 مقدار کوچک $\Delta\theta$ باشد. اگر v اندازه سرعت در آن لحظه باشد خواهیم داشت:

$$\Delta v_\perp = v\,\Delta\theta$$

و شتاب خواهد بود:

$$a_\perp = v\,(\Delta\theta/\Delta t).$$

حالا باید عبارت $\Delta\theta/\Delta t$ را به‌دست آوریم. اگر در لحظه‌ی مورد بحث خم به‌وسیله‌ی یک دایره با شعاع مشخص R تقریب زده شود، این ذره قادر خواهد بود تا در بازه‌ی زمانی Δt مسافت s را که برابر با $v\Delta t$ است بپیماید که در آن v سرعت ذره است.

$$\Delta\theta = (v\,\Delta t)/R, \qquad \text{یا} \qquad \Delta\theta/\Delta t = v/R.$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$a_\perp = v^2/R, \tag{۱۶.۱۱}$$

همانطور که از قبل انتظار داشتیم.

۷.۱۱ ضرب داخلی بردارها

حالا بیایید چند ویژگی دیگر از بردارها را بررسی کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد که طول یک قدم در فضا در تمامی دستگاه‌های مختصات یکسان است. به عبارت دیگر اگر یک قدم مشخص که آن را با نماد $\mathbf{r}$ نشان می‌دهیم در یک دستگاه مختصات با پارامترهای x، y، z و در دستگاه مختصات دیگر با x', y', z' نمایش داده شود، طول بردار مورد بحث $|\mathbf{r}| = r$ در هردو دستگاه برابر خواهد بود. با توجه به آنکه

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

و همچنین

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

می‌خواهیم نشان دهیم که این دو کمیت با هم برابر هستند. راحت‌تر است تا در اثبات این تساوی از جذر عبارت‌ها چشم‌پوشی کنیم، بنابراین اجازه دهید تا درباره‌ی مربع فاصله‌ها صحبت کنیم که بدین ترتیب مسئله به اثبات معادله‌ی زیر تبدیل خواهد شد:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \tag{۱۷.۱۱}$$

حالا اگر از معادله‌ی (۵.۱۱) استفاده کنیم خواهیم دید که طرفین تساوی با هم برقرارند. بنابراین این معادله، نوع دیگری از معادلات است که در تمامی دستگاه‌های مختصات برقرار است.

در این‌جا ما به یک نکته‌ی جدید دست پیدا کرده‌ایم. می‌توانیم یک کمیت جدید تعریف کنیم که تابعی از x، y و z است و آن را ضرب داخلی بنامیم. این کمیت، کمیتی بدون راستاست و در تمامی دستگاه‌های مختصات داری مقدار یکسانی است. به این ترتیب ما از دل بردارها یک اسکالر بیرون کشیدیم. در این‌جا لازم است تا یک قانون عمومی برای این کار به‌دست آوریم. مشخص است که این قانون باید برای یک حالت خاص برقرار باشد: جمع زدن مربعات مؤلفه‌ها. حالا بگذارید یک کمیت جدید تعریف کنیم که آن را به‌صورت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. این موجود یک بردار نیست، یک اسکالر است. کمیتی که در تمامی دستگاه‌های مختصات یکسان است و آن را به‌صورت جمع مربعات سه مؤلفه‌ی بردار تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{۱۸.۱۱}$$

حالا ممکن است بپرسید این محاسبه در کدام دستگاه مختصات صورت گرفته است؟ جواب این است که عبارت حاصل بستگی به دستگاه مختصات ندارد و در هر محور دلخواه مقدار یکسانی خواهد داشت. به این ترتیب ما نوع خاصی از کمیت‌ها را داریم که به آن‌ها کمیت‌های ناوردا و یا اسکالر می‌گوییم که به‌وسیله‌ی جمع مربعات مؤلفه‌های یک بردار به‌دست آمد. حالا اگر ما برای هر دو بردار دلخواه **a** و **b** کمیت زیر را تعریف کنیم

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \qquad (۱۹.۱۱)$$

با محاسبه‌ی این کمیت در پایه‌های پرایم‌دار و بدون پرایم درخواهیم یافت که مقدار آن در این دو دستگاه مقدار یکسانی است. برای اثبات این موضوع، یادآور می‌شویم که این ادعا برای عبارت‌های $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$، $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ که در آن $\mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$، صادق است. بنابراین جمع مربعات دو بردار $(a_x+b_x)^۲+(a_y+b_y)^۲+(a_z+b_z)^۲$ مقداری ناوردا خواهد بود.

$$(a_x + b_x)^۲ + (a_y + b_y)^۲ + (a_z + b_z)^۲ = (a_{x'} + b_{x'})^۲ + (a_{y'} + b_{y'})^۲ + (a_{z'} + b_{z'})^۲. \qquad (۲۰.۱۱)$$

اگر هر دو سمت عبارت بسط داده شود، در آن عبارت‌هایی مشابه عبارت (۱۸.۱۱) و (۱۹.۱۱) به‌دست می‌آید. ناوردایی جمله‌هایی که به شکل معادله‌های (۱۸.۱۱) و (۱۹.۱۱) هستند به این منتج می‌شوند که عبارت ضرب داخلی (۱۹.۱۱) هم ناوردا باقی بماند.

کمیت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ضرب اسکالر (ضرب داخلی) دو بردار **a** و **b** نامیده می‌شود که دارای ویژگی‌های جالبی است. برای مثال به‌راحتی می‌توان نشان داد که

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}. \qquad (۲۱.۱۱)$$

در ضمن یک روش هندسی ساده برای محاسبه‌ی $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ بدون نیاز به دانستن مؤلفه‌های بردارهای **a** و **b** وجود دارد: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ به‌سادگی برابر است با ضرب طول بردار **a** در طول بردار **b** ضرب‌در کسینوس زاویه‌ی میان آن دو بردار. چرا؟ فرض کنید یک دستگاه مختصات خاص را در نظر بگیریم که در آن بردار **a** در راستای محور **x** قرار بگیرد. در این حالت تنها مؤلفه‌ای از بردار **a** که غیر صفر است، مؤلفه‌ی a_x است که در عین حال همان طول کل بردار **a** هم محسوب می‌شود. بنابراین معادله‌ی (۱۹.۱۱) به‌صورت روبرو خواهد بود $\mathbf{ab} = a_x b_x$ که این عبارت برابر است با ضرب طول بردار **a** در میزان طول بردار **b** در امتداد بردار **a** (که همان امتداد محور **x** است) که برابر است با $b\cos\theta$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta.$$

بنابراین این معادله در آن مختصات خاص صادق است و از طرف دیگر با توجه به ناوردایی عبارت $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ اگر این عبارت در یک دستگاه مختصات صادق باشد، در هر دستگاه مختصات دیگری هم صادق است.

اما ضرب داخلی به چه دردی می‌خورد؟ جایی از فیزیک وجود دارد که به آن احتیاج داشته باشیم؟ جواب مثبت است! کل‌الیوم در همه جای فیزیک با این جانور سروکار داریم. برای مثال در فصل چهارم، ما انرژی جنبشی را به‌صورت $\frac{۱}{۲}mv^۲$ تعریف کردیم. اگر جسم در حال حرکت در سه بعد باشد، v^2 معادل جمع مربعات مؤلفه‌های سرعت است: سرعت در راستای **x** به توان دو به‌علاوه‌ی سرعت در راستای **y** به

توان دو به‌علاوه‌ی سرعت در راستای **z** به توان دو. و به این ترتیب معادله‌ی انرژی جنبشی با توجه به تحلیل برداری به‌صورت زیر است:

$$\text{K.E.} = \tfrac{1}{2}m(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \qquad (22.11)$$

انرژی یک کمیت دارای جهت نیست. در حالی که تکانه یک بردار است و دارای جهت است که به‌صورت بردار سرعت ضرب‌در جرم جسم تعریف می‌شود.

مثال دیگری از ضرب داخلی، کار انجام شده توسط یک نیروست وقتی آن نیرو چیزی را از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر جابه‌جا می‌کند. ما هنوز معنی کار را به صورت فیزیکی تعریف نکرده‌ایم، اما علی‌الحساب و مختصراً کار هم‌ارز است با تغییر انرژی یک وزنه وقتی آن را در مسیر **s** به وسیله‌ی نیروی **F** جابه‌جا می‌کنیم.

$$\text{Work} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}. \qquad (23.11)$$

در بعضی مواقع راحت‌تر است که تحلیل برداریمان را در یک جهت مشخص انجام دهیم. مثلاً در راستای قائم که جهت گرانش است. برای همچنان هدفی خوب است که در راستای موردنظرمان چیزی به اسم **بردار یکه**[8] ابداع کنیم. منظورمان از بردار یکه این است که حاصل ضرب داخلی آن بردار با خودش یک شود. ما چنین برداری را یک بردار یکه می‌نامیم: $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$. به این ترتیب اگر مؤلفه‌ی یک بردار را در جهت بردار **i** بخواهیم، می‌توان دید که حاصل ضرب داخلی $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}$، $a\cos\theta$ خواهد بود که همان مؤلفه‌ی بردار **a** در راستای **i** است. این یک روش بسیار دوست‌داشتنی برای به‌دست آوردن مؤلفه‌های هر برداری در راستاهای دلخواه است. در واقع این روش این امکان را به ما می‌دهد تا همه مؤلفه‌های یک بردار دلخواه را به‌دست آوریم و در نهایت به یک نمایش جالب دست پیدا کنیم. فرض کنید در یک دستگاه مختصات داده شده x، y و z ما سه بردار یکه به نام‌های **i**، **j** و **k** بسازیم که به ترتیب در راستاهای x، y و z هستند. توجه کنید که $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$. اما در مورد $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ چه چیزی می‌توان گفت؟ وقتی که دو بردار بر همدیگر عمود باشند، ضرب داخلی آنها صفر است. بنابراین:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1 \\
&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \qquad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = 1 \\
&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \qquad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0 \qquad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1
\end{aligned} \qquad (24.11)$$

حال با این تعریف، هر برداری را به هرشکلی که باشد می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}. \qquad (25.11)$$

به‌وسیله‌ی این نمایش ما می‌توانیم از مؤلفه‌های یک بردار، خود بردار را بازنویسی کنیم.

آنچه تا این‌جا درباره‌اش حرف زده‌ایم، همه‌ی حرف‌های ممکن درباره‌ی بردارها نیست. با این وجود، فعلاً قدم جدیدی برنمی‌داریم و به‌جای آن سعی می‌کنیم تا بعضی از چیزهایی را که در این بخش درباره‌اش صحبت کردیم، در مسئله‌های فیزیکی به‌کار ببریم. وقتی به اندازه‌ی کافی دستمان در این مفاهیم گرم شد و آن‌ها را یاد گرفتیم، این امکان را داریم تا بدون گیج شدن بتوانیم قدم‌های بیشتری در فهم ویژگی‌های بردارها برداریم. در ادامه خواهیم دید که می‌توانیم یک ضرب به دردبخور دیگر از بردارها معرفی کنیم که به‌صورت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نوشته می‌شود و به آن ضرب خارجی می‌گوییم که بحث درباره‌ی آن را به فصل بعد موکول می‌کنیم.

---

[8] unit vector

۷.۱۱. ضرب داخلی بردارها