

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 43

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۴۳

مترجم: الهام سروری

ویراستار: الهام یوسفیان

حروفچین: امید ادیب نیا

نسخه‌ی ۱۰۰ پاییز ۱۴۰۰

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

www.Zharfa90.ir

این صفحه از قصد خالی گذاشته شده است.

فصل ۴۳

انتشار^۱

۱.۴۳ برخوردهای بین مولکول‌ها

آنچه تا کنون در نظر گرفته بودیم، حرکت‌های مولکولی برای گازی در تعادل گرمایی بود. حال قصد داریم درباره‌ی آن چیزی بحث کنیم که در حالت نزدیک به تعادل اتفاق می‌افتد. زمانی که از حال تعادل دور می‌شویم، قضیه بسیار پیچیده می‌شود. بنابراین کار ما به حالت‌هایی نزدیک به تعادل مربوط می‌شود.

برای دیدن آنچه اتفاق می‌افتد، به نظریه‌ی جنبشی برمی‌گردیم. مکانیک آماری^۲ و ترمودینامیک با فرآیندهای تعادلی آمیخته شده‌اند. در حالی که در حالت‌هایی جدا از حال تعادل، تنها می‌توان از آنالیزی صحبت کرد که بر اتم تا اتم اعمال می‌شود.

به عنوان یک مثال ساده از شرایط عدم تعادل^۳، می‌توان هم‌جوشی یون‌ها را در یک گاز در نظر گرفت. فرض کنید به‌طور نسبی غلظت یون‌ها (مولکول‌هایی دارای بار الکتریکی) کم باشد. در صورت عدم وجود مولکول‌های دیگر، یک مولکول تا زمانی که به دیواره‌ی ظرف برخورد نکرده‌است، می‌تواند شتاب ثابتی داشته‌باشد. اما با وجود دیگر مولکول‌ها این اتفاق رخ نمی‌دهد و طی حرکت، سرعت مولکول افزایش می‌یابد تا زمانی که با مولکول دیگری برخورد کند و تکانه‌ی آن کاهش یابد. این فرآیند دوباره رخ می‌دهد و مولکول‌ها با افزایش سرعت مواجه می‌شوند و دوباره به دلیل برخورد، تکانه‌ی آن‌ها کم می‌شود. در واقع می‌توان ادعا کرد که یون در مسیر کاتوره‌ای خودش کار انجام می‌دهد، در حالی که حرکتی خالص در جهت نیروی الکتریکی وجود دارد.

در چنین حالتی باید شاهد این اتفاق باشیم که یون به‌طور میانگین انحرافی از سرعت متوسط دارد که متناسب با قدرت میدان الکتریکی است و باعث حرکت سریع‌تر یون می‌شود. یون در طول میدان الکتریکی حرکت می‌کند؛ در حالی که در تعادل گرمایی نیست و در تلاش است تا در زمان رسیدن به انتهای دیواره، به تعادل برسد. به این ترتیب، با استفاده از نظریه‌ی جنبشی می‌توان به محاسبه‌ی این انحراف از سرعت پرداخت.

^۳nonequilibrium circumstance

^۱Diffusion
^۲Statistical mechanics

با توجه به توانایی فعلی ما در زمینه‌ی ریاضیات، قادر به محاسبه‌ی دقیق آن‌چه رخ می‌دهد نیستیم؛ اما می‌توان نتایج را به‌طور تقریبی به‌دست آورد، به‌صورتی که خصوصیات اساسی سیستم را نشان می‌دهد. ما قادر به درک تغییرات متغیرهایی مانند فشار، دما و... هستیم، در حالی که امکانی برای بررسی دقیق فاکتورهای عددی صحیح در مقابل همه‌ی جملات وجود ندارد. بنابراین در مشتق‌گیری‌ها، از بابت دقت^۴ مقادیر فاکتورهای عددی که با روش‌های پیچیده‌ی ریاضی به‌دست می‌آیند، نگرانی نداریم. قبل از اینکه به سراغ آن‌چه در حالت غیرتعادلی رخ می‌دهد برویم، نیاز است که به آن‌چه در حالت تعادل گرمایی در گاز رخ می‌دهد، رویکرد دقیق‌تری داشته باشیم.

آن‌چه باید بدانیم به‌عنوان مثال، شامل متوسط زمانی بین برخوردهای متوالی یک مولکول است. هر مولکول مشخص در طول یک دوره‌ی زمانی T ، تعداد N برخورد مشخص دارد. اگر دوره‌ی زمانی دو برابر شود، مسلماً تعداد برخوردها نیز دو برابر می‌شود.

تعداد برخوردها متناسب با زمان T است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$N = T/\tau. \quad (۱.۴۳)$$

ثابت معادله را می‌توان متناسب با $1/\tau$ در نظر گرفت و τ را بعد زمان خواند. ثابت τ نمایانگر متوسط زمان بین دو برخورد است. به‌عنوان مثال فرض کنید در طی یک ساعت، 60 برخورد انجام می‌شود، بنابراین مقدار τ یک دقیقه می‌شود.

اغلب ممکن است این سؤال مطرح شود که احتمال برخورد برای یک مولکول در بازه‌ی زمانی dt چیست؟ مسلماً پاسخ با توجه به درک ما، مقدار dt/τ است؛ اما جای بحثی قانع‌کننده‌تر هم وجود دارد! فرض کنید تعداد زیادی مولکول N وجود دارد، چه تعداد از برخوردها در بازه‌ی زمانی dt بعدی اتفاق می‌افتد؟ متوسط زمان نسبت به بحث قبل هیچ تغییری نخواهد کرد. اگر حالت تعادل اعمال شود، در واقع یک مولکول برخوردی در بازه‌ی dt خواهد داشت. تعداد برخوردهای N مولکول در زمان dt مقدار Ndt می‌شود و احتمال برخورد برای هر تک مولکول، تنها $1/N$ یا $(1/N)(Ndt/\tau)$ است. با توجه به آن‌چه در بالا حدس زدیم، کسر مولکول‌هایی که متحمل یک برخورد در بازه‌ی dt می‌شوند، مقدار dt/τ است. به‌عنوان مثال اگر τ یک دقیقه باشد، در یک ثانیه کسر ذراتی که متحمل یک برخورد می‌شوند، $1/60$ خواهد شد. این بدین معناست که $1/60$ مولکول‌ها در شرایطی قرار می‌گیرند که به اندازه‌ی کافی به یکدیگر نزدیک شوند و شرایط برای برخورد بعدی در ثانیه‌ی دوم محیا گردد.

زمانی که از τ صحبت می‌کنیم، این کمیت به متوسط زمانی^۵ هر برخورد اشاره دارد که یک دقیقه است؛ ولی باید دقت داشت که این به معنی رخ دادن همه‌ی برخوردها، در بازه‌ی زمانی دقیقاً یک دقیقه نیست. یک ذره‌ی مشخص بعد از یک دقیقه یک برخورد خواهد داشت و برای برخورد بعد، به اندازه‌ی یک دقیقه انتظار خواهد کشید. زمان بین برخوردهای متوالی کاملاً متغیر است که البته در این‌جا مورد بحث نیست. همان‌طور که قبلاً

average time^۵

precisely^۴

گفته شد، متوسط زمانی یک دقیقه است و آن چه ما به دنبال آن هستیم، این است که به عنوان مثال، احتمال اینکه مولکولی هیچ برخوردی در بازه‌ی ۲ دقیقه نداشته باشد، چه قدر است؟ در واقع به گونه‌ای جامع‌تر، به دنبال احتمال یافتن مولکولی در زمان t بدون هیچ برخوردی هستیم.

رهیافت مسئله به این صورت است که شروع می‌کنیم به مشاهده‌ی ذره‌ای مشخص در لحظه‌ای اختیاری که ما آن را $t = 0$ می‌نامیم. سپس احتمال این را می‌یابیم که مولکول در بازه‌ی t ، بدون هیچ برخوردی با مولکولی دیگر پیش برود. برای محاسبه‌ی این احتمال، به مشاهده‌ی اتفاقاتی می‌پردازیم که برای همه‌ی N مولکول در محفظه می‌افتد؛ در چنین حالتی به اندازه‌ی زمان t منتظر می‌مانیم. بعضی از مولکول‌ها برخورد خواهند داشت. کمیت $N(t)$ تعداد ذراتی را نشان می‌دهد که در بازه‌ی زمانی t ، برخوردی نداشته‌اند و مسلماً $N(t)$ کم‌تر از N است. یافتن کمیت $N(t)$ با آگاهی از چگونگی تغییرات آن در زمان ممکن است. اگر از تعداد $N(t)$ مولکول که در واحد زمان t پیش می‌روند آگاه باشیم و کمیت $N(t + dt)$ را تعداد مولکول‌هایی بخوانیم که در بازه‌ی $t + dt$ پیش می‌روند (که به واسطه‌ی تعداد برخوردهایی که در بازه‌ی dt رخ می‌دهد، مقداری کم‌تر از $N(t)$ دارد)، تعداد برخوردها در بازه‌ی dt به صورت جملاتی از زمان میانگین τ در خواهد آمد و در واقع $dN = N(t)dt/\tau$ می‌شود که با استفاده از آن می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$N(t + dt) = N(t) - N(t) \frac{dt}{\tau}. \quad (۲.۴۳)$$

جمله‌ی سمت چپ $N(t + dt)$ را می‌توان با توجه به تعریف محاسباتی، به صورت $N(t)$ نوشت و با جای‌گذاری در رابطه‌ی (۲.۴۳)، نتیجه می‌دهد که

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}. \quad (۳.۴۳)$$

تعداد مولکول‌هایی که در بازه‌ی dt کنار می‌روند، با تعداد مولکول‌های حاضر متناسب است و به طور معکوس با متوسط عمر τ رابطه دارد.

اگر معادله (۳.۴۳) را به شکل

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = -\frac{dt}{\tau}. \quad (۴.۴۳)$$

بازنویسی کنیم، به راحتی می‌توانیم از دو طرف انتگرال بگیریم. هر دو طرف رابطه، دیفرانسیل کامل است پس با انتگرال‌گیری

$$\ln N(t) = -t/\tau + (\text{ثابت } a), \quad (۵.۴۳)$$

که یعنی

$$N(t) = (\text{ثابت}) e^{-t/\tau}. \quad (۶.۴۳)$$

مقدار ثابت فرمول، معادل با N_0 است که تعداد کل مولکول‌های حاضر است که همگی در لحظه‌ی $t = 0$ واقعند و منتظر برخورد بعدی هستند. می‌توانیم نتایج را به صورت

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (۷.۴۳)$$

بنویسیم.

اگر به دنبال احتمال برخورد نداشتن تا اینجا باشیم، یعنی همان $P(t)$ ، می‌توانیم N را بر N_0 تقسیم کنیم.

پس

$$P(t) = e^{-t/\tau}. \quad (۸.۴۳)$$

بنابراین احتمال اینکه مولکولی خاص در زمان t هیچ برخوردی نداشته باشد، به صورت $e^{-t/\tau}$ است که τ متوسط زمانی بین دو برخورد است. در واقع احتمال از زمان $t = 0$ ، شروع به فاصله‌گرفتن از مقدار یک می‌کند و به مرور با افزایش زمان t ، کمتر و کمتر می‌شود و احتمال اینکه یک مولکول، برخوردی در زمان τ داشته باشد به مقدار $0.۳۷ \approx e^{-1}$ می‌رسد. این شانس زمانی که متوسط زمانی بین دو برخورد بزرگ‌تر شود، به کمتر از نیم هم خواهد رسید. از آنجا که به اندازه‌ی کافی مولکول آزاد برای برخورد با بازه‌ی زمانی بیش‌تر از متوسط زمانی وجود دارد، می‌توان متوسط زمانی را همچنان τ در نظر گرفت.

در ابتدا τ متوسط زمان بین برخوردها تعریف شد. نتیجه‌ای که از معادله‌ی (۷.۴۳) به دست می‌آید، درباره‌ی متوسط زمان لحظه‌ی شروع برخورد صحبت می‌کند که به مقدار τ و اختیاری است. این حقیقت شگفت‌انگیز بدین روش زیر نشان داده می‌شود: تعداد مولکول‌هایی که در برخورد بعدی در بازه‌ی زمانی dt در زمان t ، بعد از انتخاب زمان اختیاری شروع برخورد، حضور دارند، معادل $N(t)dt/\tau$ است. زمانی که آن‌ها تا برخورد بعدی دارند، t است و متوسط زمانی تا برخورد بعد نیز به روش معمول به دست می‌آید:

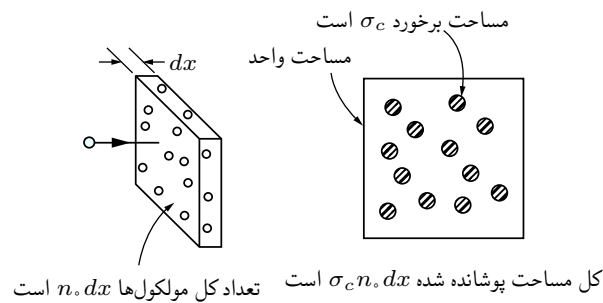
$$\text{متوسط زمان تا برخورد بعدی} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \frac{N(t) dt}{\tau}.$$

با استفاده از $N(t)$ به دست آمده در (۷.۴۳) و محاسبه‌ی انتگرال، به این نتیجه می‌رسیم که τ زمان میانگین از هر لحظه‌ای تا برخورد بعدی است.

۲.۴۳ متوسط مسیر آزاد^۶

از روش‌های کلیدی برای تشریح برخوردهای مولکولی، در نظر گرفتن مسافت طی شده بین دو برخورد است. اگر میانگین زمان بین دو برخورد τ باشد و متوسط سرعت مولکول‌ها باشد، انتظار داریم فاصله‌ی متوسط بین

^۶ mean free path



شکل ۱۰۴۳: سطح مقطع برخورد

برخوردها که l نامگذاری می‌شود، از مقادیر τ و v حاصل شود. این فاصله‌ی بین برخوردها، متوسط مسیر آزاد خوانده می‌شود.

$$l = \tau v. \quad (۹.۴۳)$$

در این فصل به تیزبینی بیش‌تری برای اعمال انتخاب نوع میانگین‌گیری نیاز داریم. میانگین‌گیری‌های متنوعی از جمله متوسط‌گیری، ریشه‌ی مربعی میانگین و ... وجود دارد. این میانگین‌گیری‌ها به‌طور تقریبی معادل یک‌دیگرند و تنها تفاوت آن‌ها در فاکتورهای نزدیک به یک است.

از آن‌جا که آنالیزی جزئی برای فاکتورهای عددی درست وجود دارد، بابت میانگین مورد نیاز برای هر نقطه‌ی خاص، نگران نیستیم. هم‌چنین این نکته قابل توجه است که نمادهای جبری اختیارشده در بعضی از کمیت‌های فیزیکی (مثل l برای متوسط مسیر آزاد) عمدتاً از روی توافق عمومی نیست.

شانس اینکه مولکول، یک برخورد در زمان کوتاه dt داشته‌باشد، معادل با dt/τ و شانس اینکه برخوردی در فاصله‌ی dx داشته‌باشد، معادل با dx/l است. با پیگیری بحث قبل، خواننده می‌تواند از احتمال پیمودن حداقل فاصله‌ی x توسط یک مولکول، قبل از برخورد بعدیش صحبت کند که معادل $e^{-x/l}$ است.

میانگین فاصله‌ای که یک مولکول قبل از برخورد با دیگر مولکول‌ها (متوسط مسیر آزاد l) می‌پیماید، به تعداد مولکول‌های اطراف و اندازه‌ی مولکول‌های هدف وابسته است. اندازه‌ی مؤثر یک هدف در برخورد، معمولاً با سطح مقطع برخورد تفسیر می‌شود. ایده‌ی مشابه این بحث، در مباحث فیزیک هسته‌ای و پراکندگی نور نیز مطرح است.

ذره‌ای متحرک را در نظر بگیرید که فاصله‌ی dx را درون گازی با n_0 پراکندگی (مولکول) در واحد حجم می‌پیماید (شکل ۱۰۴۳). با نگاهی به هر واحد سطح عمود بر جهت حرکت ذره‌ی انتخابی، متوجه می‌شویم که تعداد $n_0 dx$ مولکول در واحد سطح وجود دارد! اگر هر کدام نشان‌دهنده‌ی سطح مؤثر برخورد یا به‌طور معمول، سطح مقطع برخورد σ_c باشد، کل منطقه‌ی تحت پوشش پراکندگی، به‌صورت $\sigma_c n_0 dx$ است.

سطح مقطع برخورد به معنی ناحیه‌ای است که مرکز ذرات مورد نظر با مولکولی مشخص برخورد دارند. اگر مولکول‌ها را به‌صورت کره‌هایی کوچک در نظر بگیریم (تصویرسازی کلاسیکی)، انتظار داریم $\sigma_c = n(r_1 + r_2)^2$

باشد، در حالی که r_1 و r_2 شعاع‌های دو جسم برخوردکننده هستند. شانس اینکه ذرات مورد نظر برخوردی داشته باشند، به صورت نسبت سطح پوشیده شده با مولکول‌های پراکنده به کل ناحیه است؛ که با در نظر گرفتن مقدار یک برای آن، می‌توانیم از احتمال یک برخورد در فاصله‌ی dx صحبت کنیم که مقدار $\sigma_c n_o dx$ را دارد.

$$dx \text{ احتمال برخورد در } = \sigma_c n_o dx. \quad (10.43)$$

همان‌طور که قبلاً ملاحظه شد، شانس یک برخورد در فاصله‌ی dx را می‌توان به صورت جملاتی از متوسط مسیر آزاد l یعنی dx/l در نظر گرفت. با مقایسه‌ی این مسئله با رابطه‌ی (۱۰.۴۳) می‌توان به رابطه‌ی بین متوسط مسیر آزاد و سطح مقطع برخورد رسید که بدین شکل است:

$$\frac{1}{l} = \sigma_c n_o, \quad (11.43)$$

اگر آن را بدین شکل بازنویسی کنیم، به خاطر سپردن آن راحت‌تر است:

$$\sigma_c n_o l = 1. \quad (12.43)$$

این فرمول به‌طور میانگین برخورد ذرات را در فاصله‌ی l در نظر می‌گیرد که پراکندگی مولکول‌ها در آن می‌تواند کل منطقه را پوشش دهد. در یک حجم استوانه‌ای به طول l و قاعده‌ی واحد سطح، تعداد $n_o l$ پراکندگی وجود دارد. اگر هر کدام دارای سطح σ_c باشند، در این صورت به‌طور کلی رویه‌ای مطرح می‌شود که با $n_o \sigma_c l$ پراکندگی در واحد سطح پوشش داده می‌شود. البته همه‌ی رویه به‌طور کامل تحت پوشش قرار نمی‌گیرد؛ چون تعدادی از مولکول‌ها پشت دیگر مولکول‌ها واقع شده‌اند. این دلیلی است برای اینکه چرا بعضی از مولکول‌ها قبل از برخورد، در فاصله‌ای بیش‌تر از l حرکت می‌کنند. این مسئله تنها شامل میانگین مولکول‌هایی است که در زمانی که فاصله l را طی می‌کنند، دارای برخورد هستند. با اندازه‌گیری متوسط مسیر آزاد l می‌توان سطح مقطع پراکندگی^۷ را محاسبه کرد و نتایج را با محاسبات بر پایه‌ی جزئیات نظریه‌ی ساختار اتمی مقایسه کرد. البته این مسئله‌ی دیگری است. پس دوباره به مسئله‌ی حالت‌های غیر تعادلی بازمی‌گردیم.

۳.۴۳ سرعت رانش^۸

حال به توصیف آن چیزی می‌پردازیم که برای یک مولکول یا چند مولکول متفاوت از اکثریت مولکول‌ها رخ می‌دهد. مولکول‌های مورد نظر و خاص خود را در پس‌زمینه‌ای از مولکول‌ها در نظر می‌گیریم. یک مولکول از جهات مختلف می‌تواند خاص قلمداد شود؛ مثلاً از سایر مولکول‌های پس‌زمینه سنگین‌تر باشد، یا فرمول شیمیایی متفاوتی داشته باشد، یا باردار باشد و یا ... در واقع می‌توان از یونی در پس‌زمینه‌ای بدون بار حرف

^۸The drift speed

^۷collision cross section

زد. به علت همین تفاوت‌ها در بار و جرم، مولکول‌های مورد نظر را مولکولی خاص در نظر می‌گیریم و توجه خود را به این مولکول‌ها نسبت به زمینه معطوف می‌کنیم. با بررسی آن‌چه برای این مولکول‌های خاص اتفاق می‌افتد، می‌توانیم به فهم تأثیرات پایه‌ای پردازیم که در پدیده‌های متفاوت با همین رویه رخ می‌دهند. به صورت اجمالی می‌توان به پراکندگی گازها، جریان‌های الکتریکی در باتری، رسوب‌گذاری، جداسازی به روش سانتری فیوژ و ... اشاره کرد.

با تمرکز بر فرآیندهای اساسی شروع می‌کنیم. یک مولکول خاص در پس‌زمینه‌ای از گاز در نظر می‌گیریم که نیروی مشخص F روی آن عمل می‌کند (این نیرو می‌تواند گرانشی یا الکتریکی باشد). به علاوه، نیروی نه چندان مشخصی، ناشی از برخورد با مولکول‌های پس‌زمینه هم نقش دارد. ما به توصیف رفتار کلی مولکول مورد نظر (خاص) خود علاقه‌مند هستیم. به طور جزئی، مولکول شروع به برخورد با مولکول‌های دیگر و تکرار این برخوردها به طور متوالی می‌کند؛ اما اگر با دقت مشاهدات را جلو ببریم، شاهد حرکتی در جهت نیروی F خواهیم بود. در چنین حالتی، از رانشی^۹ در حرکت تصادفی مولکول مورد نظر صحبت می‌کنیم؛ در واقع علاقه‌مندیم سرعت رانشی ناشی از نیروی F را بدانیم.

اگر به مشاهده‌ی مولکول در لحظه‌ای پردازیم که انتظار داریم بین دو برخورد باشد و علاوه بر آن سرعت مولکول بعد از برخورد نسبت به قبل از آخرین برخورد تغییری نکند، در این صورت، یک سری از مؤلفه‌های سرعت ناشی از نیروی F برچیده می‌شوند. در یک زمان کوتاه (به طور میانگین به اندازه‌ی τ)، مولکول در معرض یک برخورد قرار می‌گیرد و پس از برخورد شروع به حرکتی جدید با سرعتی جدید می‌کند، در حالی که شتاب آن تغییر نمی‌کند و مشابه شتاب F قبل است.

لحظه‌ای فرض کنید بعد از هر برخورد مولکول مورد نظر ما یک شروع کاملاً تازه داشته‌باشد و هیچ حافظه‌ای از شتاب قبلی خود به وسیله‌ی نیروی F نداشته‌باشد. این فرض می‌تواند معقول تلقی شود اگر مولکول مورد نظر از مولکول‌های پس‌زمینه خیلی سبک‌تر باشد؛ اما به طور کلی این فرض نامعتبر است.

در حال حاضر، فرض ما این است که مولکول مورد نظر، هر برخورد را با سرعت خاص خود در هر جهتی با احتمالی معادل انجام دهد. زمانی که مولکول شروع به سرعت‌گرفتن می‌کند، در تمام جهات سرعتی معادل با بقیه‌ی جهات دارد؛ بنابراین در یک حرکت خالص شرکت نمی‌کند و جای هیچ نگرانی‌ای برای سرعت اولیه بعد از برخورد وجود ندارد. علاوه بر حرکت تصادفی مولکول، هر مولکول تحت نظر می‌تواند هر اندازه حرکتی داشته‌باشد.

یک سرعت اضافی در جهت نیروی F را در نظر بگیرید که بعد از آخرین برخورد شناسایی می‌شود. میانگین مقدار این بخش از سرعت چیست؟ این سرعت در واقع شتاب F/m (که m جرم مولکول مورد نظر است). ضرب در میانگین زمان از آخرین برخورد است. حال، میانگین زمان از آخرین برخورد باید همانند زمان متوسط تا برخورد بعدی باشد که قبلاً آن را τ نامیدیم.

^۹drift

میانگین سرعت حاصل از F را سرعت رانش می‌نامیم که رابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$v_{\text{رانش}} = \frac{F\tau}{m}. \quad (۱۳.۴۳)$$

این رابطه اساس اصل کار ما را در بر می‌گیرد. در این فرآیند با پیچیدگی‌های مشخصی برای τ رو به رو می‌شویم، اما فرآیند اصلی با معادله‌ی (۱۳.۴۳) تعریف می‌گردد.

به مرور متوجه خواهیم شد که سرعت رانش متناسب با نیرو است. متأسفانه هیچ نام عمومی‌ای برای ثابت این تناسب وجود ندارد. نام این ثابت به‌ازای هر نیرویی متفاوت است. اگر با یک مسئله‌ی الکتریکی مواجه باشیم، نیرو به صورت تعداد بارهای الکتریکی میدان $F = qE$ نوشته می‌شود. بنابراین ثابت بین سرعت و میدان الکتریکی E معمولاً تحرک‌پذیری^{۱۰} خوانده می‌شود. جمله‌ی تحرک‌پذیری برای نرخ سرعت رانش نیرو، ناشی از اعمال هر نیرویی به این صورت است. در حالت کلی

$$v_{\text{رانش}} = \mu F. \quad (۱۴.۴۳)$$

و μ را تحرک‌پذیری می‌نامیم. طبق رابطه‌ی (۱۳.۴۳)

$$\mu = \tau/m. \quad (۱۵.۴۳)$$

تحرک‌پذیری متناسب با میانگین سرعت بین برخوردها (تعداد کمی برخورد در سرعت‌های پایین) است و تناسبی معکوس با جرم دارد (لختی بیشتر به معنی سرعت کمتر در برخوردهاست).

برای به دست آوردن ضریب عددی صحیح در معادله‌ی (۱۳.۴۳)، باید برای مقدار صحیح آن اهمیت قائل شویم و استدلال‌های مورد بحث، ظرافت‌هایی دارند که باید به ارزیابی جزئیات و مطالعه‌ی دقیق آن‌ها بپردازیم. حال به بحثی معقول می‌پردازیم که منجر به معادله‌ی (۱۳.۴۳) از راهی اشتباه می‌شود. در طول بحث قبل گفتیم زمان متوسط بین برخوردها τ است و ذره با سرعتی تصادفی خارج می‌شود؛ اما باید توجه کرد که ذره بین برخوردها نیز سرعتی اضافی دریافت می‌کند که معادل با تعداد شتاب‌ها در زمان است. از آن‌جا که باید زمان τ برای رسیدن به برخورد بعدی وجود داشته باشد، ذره سرعت $(F/m)\tau$ را دریافت می‌کند. هنگام شروع برخورد، سرعت ذره صفر است، بنابراین بین دو برخورد به‌طور میانگین سرعت ذره به صورت نیمی از سرعت نهایی است. بنابراین متوسط سرعت رانش $1/2 F/m$ است. این نتیجه‌گیری غلط است! نتیجه‌ی رابطه‌ی (۱۳.۴۳) صحیح است؛ اگر چه استدلال حاضر معقول به نظر می‌رسد.

هم‌چنین استدلال می‌کنیم که همه‌ی برخوردها به‌طور کامل با متوسط زمانی τ جدا می‌شوند ولی در حقیقت گاهی این متوسط زمانی بلندتر و یا کوتاه‌تر می‌شود. در بیشتر موارد متوسط زمانی کوتاه‌تر از τ رخ می‌دهد که نقش کم‌تری در سرعت رانشی بازی می‌کند؛ چون که این ذرات فرصت کم‌تری برای برخورد دارند و خیلی زود صحنه را ترک می‌کنند! اگر فردی بتواند توزیع زمان‌های آزاد بین برخوردها را حساب کند، می‌تواند نشان دهد

^{۱۰}mobility

که فاکتور $1/2$ در استدلال دوم، نباید وجود داشته باشد. در واقع خطا از تلاش برای ساختن یک استدلال ساده برای ارتباط متوسط سرعت پایانی با متوسط سرعت خود ذره ناشی می شود. این رابطه ذکر شده، به این سادگی نیست. بنابراین بهتر است تمرکز بیش تری روی آن چه می خواهیم انجام دهیم بکنیم؛ یعنی متوسط سرعت خود ذره. طبق استدلال، متوسط سرعت ذره را به طور مستقیم و درست مشخص می کنیم. در چنین حالتی نیاز به به دست آوردن همه ی ضرایب درست عددی در مشتقات اولیه نیست.

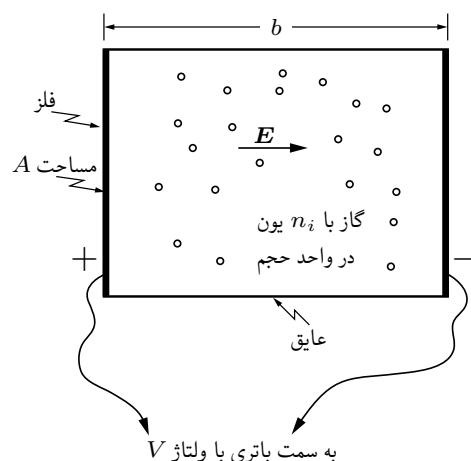
اکنون به فرض خود در باره ی ذرات ضربه زننده برمی گردیم. ذره هیچ حافظه ای در باره ی حرکت های قبلی خود ندارد و آن چه به یاد می آورد، تنها از لحظه ی شروع هر برخورد است. فرض کنید که مولکول مورد نظر، مولکولی سنگین در پس زمینه ای از مولکول های سبک تر باشد و مولکول خاص و مورد نظر ما اندازه حرکت رو به جلوی خود را از دست ندهد. ذره ی مورد نظر، چندین برخورد قبل از حرکت های تصادفی خود انجام می دهد. می توان فرض کرد که به جای اینکه هر برخورد به طور متوسط در زمان τ انجام شود، ذره کسر مشخصی از اندازه حرکت خود را ازدست دهد. در این فرآیند، از جزئیات کار چشم پوشی می کنیم و حالتی را در نظر می گیریم که نتیجه ی آن معادل با جایگزینی τ در متوسط زمان برخورد با یک τ بزرگ تر یا جدید باشد که متناسب است با متوسط زمان فراموشی، یعنی متوسط زمانی که ذره ی مورد نظر اندازه حرکت رو به جلوی خود را فراموش می کند. با چنین تفسیری از τ ، می توان فرمول (۱۵.۴۳) را به کار برد که برای شرایطی نوشته شده بود که کاملاً ساده نیست.

۴.۴۳ رسانایی یونی^{۱۱}

حال نتایج خود را به یک موضوع خاص تعمیم می دهیم. فرض کنید مخزنی از گاز داریم که در آن یون های اتمی و یا مولکولی همراه با بار الکتریکی خالص وجود دارد. شکل ۲.۴۳ گویای این صورت بندی است. اگر دو دیواره ی مخالف مخزن از جنس صفحات فلزی باشند، می توان آن ها را به کمک ترمینال های باتری به یک دیگر متصل کرد و در نتیجه یک میدان الکتریکی در گاز ایجاد کرد. میدان الکتریکی در نتیجه ی یک نیرو به یون هاست و به همین دلیل، یون ها شروع به رانش به سمت صفحات می کنند. در طی این فرآیند، جریان الکتریکی به وجود می آید و گاز یونیزه مشابه یک مقاومت رفتار می کند و با محاسبه ی شار یون از سرعت رانش، می توان به محاسبه ی مقاومت گاز یونیزه پرداخت.

به طور خاص می توان سؤال کرد که وابستگی شار جریان الکتریکی به تفاوت ولتاژ مربوط به دو سر صفحه ی فلزی چه مقدار است؟ موردی را در نظر بگیرید که در آن مخزن به شکل جعبه ای مستطیلی با طول b و سطح مقطع عرضی A ((۲.۴۳)) است. اگر اختلاف پتانسیل یا ولتاژ از یک صفحه به صفحه ی دیگر V باشد، میدان الکتریکی E بین صفحات، مقدار V/b را خواهد داشت. (پتانسیل الکتریکی کاری است که روی واحد بار از یک صفحه به صفحه ی دیگر انجام می شود (نیرو در واحد بار E است). و اگر E در همه جای صفحه یک مقدار داشته باشد، می توان با تقریب خوبی گفت که کار انجام شده در واحد بار، تنها Eb است؛ بنابراین $V = Eb$ است). نیروی مشخص روی گاز یونیزه، qE است؛ در حالی که q بار الکتریکی یون است و سرعت رانش یون ها

^{۱۱} Ionic conductivity



شکل ۲۰.۴۳: جریان الکتریکی از یک گاز یونیزه شده

μ برابر نیرو است یا

$$v_{\text{رانش}} = \mu F = \mu q E = \mu q \frac{V}{b}. \quad (۱۶.۴۳)$$

جریان الکتریکی I در واقع شار بار در واحد زمان است و جریان الکتریکی یکی از صفحات به وسیله کل بار یون‌ها که در واحد زمان به صفحه می‌رسند، بیان می‌شود. اگر یون‌ها با سرعت رانشی به سمت صفحه، رانش پیدا کنند، یون‌هایی که در فاصله $v \cdot T$ قرار دارند، در زمان T به صفحه خواهند رسید. با در نظر گرفتن تعداد n_i یون در واحد حجم گاز، تعداد یون‌هایی که در واحد زمان T به صفحه می‌رسند، معادل با $n_i A v \cdot T$ است. هر یون بار q را حمل می‌کند، بنابراین

$$I = q n_i A v_{\text{رانش}} T. \quad (۱۷.۴۳)$$

از طرفی تعریف جریان I به صورت مقدار بار جمع‌آوری شده در زمان T بخش بر T است

$$I = q n_i A v_{\text{رانش}}. \quad (۱۸.۴۳)$$

که با جای‌گذاری سرعت رانشی از رابطه‌ی (۱۶.۴۳)، به رابطه‌ی

$$I = \mu q^2 n_i \frac{A}{b} V. \quad (۱۹.۴۳)$$

می‌رسیم. جریان متناسب با ولتاژ است که فرمی از قانون اهم است و مقاومت R رابطه‌ای معکوس با ثابت تناسب دارد

$$\frac{1}{R} = \mu q^2 n_i \frac{A}{b}. \quad (۲۰.۴۳)$$

رابطه‌ی بین مقاومت و خواص مولکولی μ ، q و n_i مشخص است که به تغییرات m و τ بستگی دارد. در صورت آگاهی از مقدار n_i و q ناشی از اندازه‌گیری‌های اتمی، می‌توان از اندازه‌گیری R برای مشخص کردن مقدار μ استفاده کرد و از μ به τ رسید.

۵.۴۳ انتشار مولکولی^{۱۲}

اکنون به نوع دیگری از مسئله و البته نوع دیگری از آنالیز رجوع می‌کنیم؛ یعنی نظریه‌ی انتشار. فرض کنید مخزنی از گاز در حالت تعادل گرمایی داریم و مقداری گاز را از نوعی متفاوت در بخشی از مخزن در نظر می‌گیریم. در واقع گاز اصلی پس‌زمینه فضا است و بخشی کوچک از فضا شامل گاز ویژه‌ی ما می‌شود. گاز ویژه شروع به پخش شدن در کل مخزن می‌کند؛ اما این پخش‌شدگی^{۱۳} به‌خاطر حضور گاز پس‌زمینه، آهسته صورت می‌گیرد. این فرآیند، پخش آهسته‌ی گاز انتشار نامیده می‌شود. کنترل انتشار عمدتاً به واسطه‌ی حضور مولکول‌های گاز ویژه و ضربه‌زدن آن‌ها به گاز پس‌زمینه صورت می‌گیرد. بعد از تعداد زیادی برخورد، مولکول‌های گاز ویژه، در نهایت به‌طور مساوی یا بیش‌تر و یا کم‌تر در حجم مخزن پخش می‌شوند.

باید دقت کافی به خرج داد تا پدیده‌ی انتشار با انتقال که به‌دلیل جریان‌های هم‌رفت رخ می‌دهد، اشتباه گرفته نشود. به‌طور معمول، فرآیند مخلوط‌شدن دو گاز از طریق ترکیبی از هم‌رفت و انتشار اتفاق می‌افتد. البته در این مورد تنها مسئله‌ی قابل توجه، عدم وجود جریان‌های گردشی است. گاز به‌وسیله‌ی حرکت‌های مولکولی توسط انتشار پخش می‌شود و هدف ما محاسبه‌ی سرعت این انتشار است.

در حال حاضر به محاسبه‌ی شار خالص مولکول‌های گاز ویژه، ناشی از حرکت مولکول‌ها می‌پردازیم. شار خالص زمانی وجود دارد که توزیع غیر یکنواختی از مولکول‌ها را داشته باشیم؛ در غیر این صورت همه‌ی حرکت‌های مولکولی به‌طور میانگین، هیچ شار خالصی را نتیجه نمی‌دهند.

ابتدا شار را در جهت X در نظر می‌گیریم. برای یافتن جریان، صفحه‌ی مختلطی عمود بر محور x در نظر می‌گیریم و به محاسبه‌ی تعداد مولکول‌های ویژه‌ی برخوردکننده با صفحه‌ی x می‌پردازیم. برای محاسبه‌ی شار خالص، باید به محاسبه‌ی تعداد مولکول‌هایی بپردازیم که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کنند و تعداد مولکول‌ها را در جهت مخالف محور x ، از آن‌ها کم کنیم. همان‌طور که چندین بار شاهد بودیم، تعداد مولکول‌های برخوردکننده‌ی سطح در مدت زمان ΔT ، به‌وسیله‌ی تعداد مولکول‌هایی تعیین می‌شود که در بازه‌ی ΔT در حجمی که به فاصله‌ی $v\Delta T$ از صفحه گسترش یافته‌است، شروع به حرکت می‌کنند (دقت کنید که در این‌جا سرعت واقعی مولکول‌هاست و نه رانشی).

با در نظر گرفتن رویه‌ی خود به‌صورت یک واحد از سطح، موضوع را ساده می‌کنیم. تعداد مولکول‌های ویژه از چپ به راست $n-v\Delta T$ است (جهت مثبت x را راست در نظر می‌گیریم) که n_- تعداد مولکول‌های ویژه

در واحد حجم به سمت چپ است (از مرتبه‌ی ۲ یا هر چیز دیگری؛ از مرتبه‌ی آن چشم‌پوشی می‌کنیم). به طور مشابه، تعداد مولکول‌های برخوردکننده از راست به چپ نیز $n_+ v \Delta T$ است که n_+ چگالی تعداد مولکول‌های ویژه در سمت راست صفحه است. اگر جریان مولکولی را J بنامیم، بدین معنی است که شار خالص مولکول‌ها در واحد سطح در واحد زمان به صورت زیر است:

$$J = \frac{n_- v \Delta T - n_+ v \Delta T}{\Delta T}, \quad (21.43)$$

یا

$$J = (n_- - n_+)v. \quad (22.43)$$

لزوم استفاده از n_+ و n_- چیست؟ زمانی که از چگالی در سمت چپ صحبت می‌کنیم، منظور چه میزان فاصله از سمت چپ صفحه است؟ باید چگالی را در مکانی نظر گرفت که مولکول‌ها از آنجا شروع به حرکت و برخورد می‌کنند؛ زیرا تعداد مولکول‌هایی که این سفر را آغاز می‌کنند، به وسیله‌ی تعداد مولکول‌های حاضر در مکان ذکر شده مشخص می‌شوند. بنابراین n_- می‌تواند به معنی چگالی فاصله به سمت چپ معادل با طول مسیر آزاد l و n_+ چگالی در فاصله‌ی l ، به سمت راست رویه‌ی مختلط است. مناسب به نظر می‌رسد که توزیع مولکول‌های ویژه در فضا را به وسیله‌ی تابع پیوسته‌ای از x ، y و z که n_a می‌خوانیمش توصیف کنیم. به کمک تابع $n_a(x, y, z)$ متوسط چگالی تعداد مولکول‌های ویژه را نشان می‌دهیم که در المان حجم کوچک در (x, y, z) واقع است. بر اساس n_a می‌توان تفاوت $(n_+ - n_-)$ را به صورت

$$(n_+ - n_-) = \frac{dn_a}{dx} \Delta x = \frac{dn_a}{dx} \cdot 2l \quad (23.43)$$

نشان داد.

با جای‌گذاری این نتایج در (۲۲.۴۳) و چشم‌پوشی از مرتبه‌ی ۲، به

$$J_x = -lv \frac{dn_a}{dx} \quad (24.43)$$

می‌رسیم. متوجه شدیم که جریان مولکول‌های ویژه با مشتق چگالی یا آن‌چه که گاهی گرادیان چگالی می‌خوانیم، متناسب است. تقریبات به کار برده شده و علاوه بر آن، فاکتورهای مختلف از مرتبه ۲ که کنار گذاشته شده است و هم‌چنین استفاده از پارامتر v در حالی که پارامتر v_x دقیق‌تر است، دقت کار را پایین می‌آورد. هم‌چنین فرض می‌کنیم n_+ و n_- به مکان عمود بر فاصله‌ی l از رویه‌ی مورد نظر اشاره دارد، در حالی که مولکول‌ها عمود بر المان رویه حرکت نمی‌کنند و l باید متناظر با شیب فاصله از رویه باشد. با در نظر گرفتن تمام این بهینه‌سازی‌ها، نتایج طرف راست رابطه‌ی (۲۴.۴۳) باید در فاکتور $1/3$ ضرب شود.

$$J_x = -\frac{lv}{3} \frac{dn_a}{dx}. \quad (25.43)$$

به طور مشابه، می‌توان معادلاتی برای جریان‌هایی در جهت y و z نوشت. جریان J_x و چگالی گرادیان dn_a/dx را می‌توان با مشاهدات ماکروسکوپییک اندازه‌گیری کرد. این نسبت آزمایشی مشخص شده، ضریب انتشار D خوانده می‌شود.

$$J_x = -D \frac{dn_a}{dx}. \quad (۲۶.۴۳)$$

برای یک گاز می‌توان انتظار داشت:

$$D = \frac{1}{3}lv. \quad (۲۷.۴۳)$$

تا کنون در این فصل دو فرآیند مجزا را در نظر گرفتیم. یکی تحرک‌پذیری، یعنی رانش مولکول‌ها ناشی از نیروهای خارجی و دیگری انتشار که به معنی پخش شدن گاز از طریق یک نیروی داخلی ناشی از برخورد مولکول‌ها است. این فرآیندها با یکدیگر در ارتباطند؛ زیرا به صورت بنیادی در هر دو محاسبات، وابستگی فرآیندها به حرکات گرمایی و متوسط مسیر آزاد دیده می‌شود. اگر در معادله (۲۵.۴۳)، $l = v\tau$ و $\tau = \mu m$ را جای‌گزین کنیم، به رابطه‌ی

$$J_x = -\frac{1}{3}mv^2\mu \frac{dn_a}{dx}. \quad (۲۸.۴۳)$$

می‌رسیم و این معادله در حالی برقرار است که mv^2 تنها وابسته به دما باشد؛ بنابراین

$$\frac{1}{3}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \quad (۲۹.۴۳)$$

در نتیجه

$$J_x = -\mu kT \frac{dn_a}{dx}. \quad (۳۰.۴۳)$$

رابطه‌ی ضریب انتشار D ، KT ضرب در μ است؛ یعنی رابطه‌ی

$$D = \mu kT. \quad (۳۱.۴۳)$$

و می‌توان دریافت که ضریب عددی در (۳۱.۴۳) دقیق است و هیچ فاکتور اضافی‌ای برای تنظیم محاسبات از فرض مسئله خارج نمی‌شود. در حقیقت می‌توان نشان داد رابطه‌ی (۳۱.۴۳) همواره، حتی در موقعیت‌های پیچیده هم صحیح است؛ در حالی که جزئیات محاسبات ما هرگز اعمال نشده‌است.

برای نشان دادن صحت رابطه‌ی (۳۱.۴۳) به طور عام، باید معادلات را با روش متفاوتی، یعنی اصول پایه‌ی مکانیک آماری استخراج کرد. موقعیتی را تصور کنید که در آن گرادیان مولکول‌های ویژه و جریان انتشار متناسب با چگالی گرادیان مطابق با (۲۶.۴۳) باشد؛ حال میدان نیرو در جهت x اعمال می‌گردد، بنابراین هر مولکول ویژه نیروی F را حس می‌کند. با توجه به تعریف تحرک‌پذیری μ سرعت رانشی معادل با

$$v_{\text{رانش}} = \mu F. \quad (۳۲.۴۳)$$

است.

به وسیله‌ی استدلال معمول، جریان رانشی (تعداد خالص مولکول‌های گذرکننده از واحد سطح در واحد زمان) نیز به صورت زیر است:

$$J_{\text{رانش}} = n_a v_{\text{رانش}}, \quad (۳۳.۴۳)$$

یا

$$J_{\text{رانش}} = n_a \mu F. \quad (۳۴.۴۳)$$

در حال حاضر، با تنظیم نیروی F ، در واقع جریان رانشی ناشی از انتشار به حال تعادل می‌رسد؛ بنابراین هیچ جریان خالصی از شار مولکول‌های ویژه حاضر نخواهد بود! بنابراین $J_x + J_{\text{رانش}} = 0$ یا

$$D \frac{dn_a}{dx} = n_a \mu F. \quad (۳۵.۴۳)$$

بعد از شرایط تعادل به حالت پایا (با زمان) می‌رسیم و گرادیان چگالی به صورت

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a \mu F}{D}. \quad (۳۶.۴۳)$$

است.

توجه داشته باشید که ما به توصیف شرایط تعادل پرداختیم. بنابراین قوانین تعادل ما از مکانیک آماری سرچشمه می‌گیرد. مطابق با این قوانین، احتمال پیداکردن مولکول در مختصات X متناسب با $e^{-U/kT}$ است که U انرژی پتانسیل است. بر اساس عدد چگالی n_a ، این به معنای

$$n_a = n_0 e^{-U/kT}. \quad (۳۷.۴۳)$$

است و با دیفرانسیل‌گیری از معادله (۳۷.۴۳) نسبت به x ، می‌توان نوشت:

$$\frac{dn_a}{dx} = -n_0 e^{-U/kT} \cdot \frac{1}{kT} \frac{dU}{dx}, \quad (۳۸.۴۳)$$

یا

$$\frac{dn_a}{dx} = -\frac{n_a}{kT} \frac{dU}{dx}. \quad (۳۹.۴۳)$$

از آن‌جا که نیروی F در جهت x است، انرژی پتانسیل U تنها $-Fx$ و $F = -dU/dx$ است و معادله‌ی (۳۹.۴۳)، رابطه‌ی

$$\frac{dn_a}{dx} = \frac{n_a F}{kT}. \quad (۴۰.۴۳)$$

را نتیجه می‌دهد. [این دقیقاً همان معادله (۹۹) است، که از اول از آن نتیجه گرفتیم $e^{-U/kT}$ ، پس به یک حلقه رسیدیم.] با مقایسه‌ی (۴۰.۴۳) و (۳۶.۴۳)، دقیقاً به رابطه‌ی (۳۱.۴۳) می‌رسیم. می‌توان ادعا کرد که معادله‌ی (۳۱.۴۳)، جریان انتشار را به صورت جملاتی از تحرک‌پذیری با ضریب صحیح را نشان می‌دهد که به طور کلی صادق است. تحرک‌پذیری و انتشار کاملاً در ارتباط با یکدیگرند و این رابطه اولین بار توسط انیشتین مطرح شد.

۶.۴۳ رسانایی گرمایی ۱۴

روش‌هایی که در نظریه‌ی جنبشی مطرح می‌شود و همان‌طور که قبلاً نشان داده‌شد، تا کنون مورد استفاده قرار گرفته‌است، در محاسبات مربوط به رسانایی گرمایی یک گاز نیز قابل اعمال است. اگر گاز بالای یک مخزن، گرم‌تر از قسمت پایینی مخزن باشد، شارش گرما از بالا به پایین است (قسمت بالایی مخزن شامل گاز گرم‌تر است؛ زیرا در غیر این صورت جریان‌های هم‌رفت به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که نمی‌توانند هدایت گرما را برعهده بگیرند). انتقال حرارت از گاز داغ‌تر به سمت سردتر، به وسیله‌ی انتشار مولکول‌های داغ انجام می‌شود که دارای انرژی بیش‌تری نسبت به مولکول‌های سردتر هستند؛ در حالی که مولکول‌های سرد نیز به سمت بالا انتشار می‌یابند. برای محاسبه‌ی شار انرژی گرمایی، باید درباره‌ی دو چیز پرسش کرد؛ انرژی حمل‌شده و رو به پایین المانی از سطح، به وسیله‌ی حرکت پایین‌رونده‌ی مولکول‌ها و همچنین انرژی حمل‌شده و رو به بالای المان سطح در راستای رویه، به وسیله‌ی حرکت مولکول‌های بالا رونده. تفاوت این دو پارامتر، شار انرژی خالص پایین‌رونده را نتیجه می‌دهد.

رسانایی گرمایی κ به صورت نسبت نرخ انرژی گرمایی حمل‌شده در راستای واحد سطح رویه به گرادیان دما تعریف می‌شود.

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = -\kappa \frac{dT}{dz}. \quad (۴۱.۴۳)$$

از آن‌جا که با در نظر گرفتن انتشار مولکولی، جزئیات کاملاً مشابه با آن‌چه قبلاً انجام دادیم می‌شود، نشان دادن رابطه‌ی

$$\kappa = \frac{knlv}{\gamma - 1}, \quad (۴۲.۴۳)$$

را بر عهده‌ی خواننده می‌گذاریم. $kT/(\gamma - 1)$ متوسط انرژی مولکول‌ها در دمای T است. اگر رابطه‌ی $nl\sigma_c = 1$ را در نظر بگیریم، در این صورت رسانایی گرمایی می‌تواند به صورت

$$\kappa = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{kv}{\sigma_c}. \quad (۴۳.۴۳)$$

باشد. در این صورت، به نتیجه‌ای نسبتاً تعجب‌آور می‌رسیم. می‌دانیم که میانگین سرعت مولکول‌های گاز، وابسته به دماست و نه چگالی! انتظار داریم σ_c وابسته به پارامتر ابعاد مولکول‌ها باشد. بنابراین به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که رسانایی گرمایی (و بنابراین نرخ شارش گرما در شرایطی خاص) از چگالی گاز مستقل است. تغییر در تعداد حمل‌کننده‌های انرژی، وابسته به تغییر در چگالی مولکول‌ها تنها به وسیله‌ی فواصل بزرگی که حمل‌کننده‌ی انرژی بین برخوردها طی می‌کند، قابل جبران است.

سوالی که ممکن است پیش بیاید این است که آیا شار گرمایی هنگامی که چگالی گاز به سمت صفر میل می‌کند نیز هم‌چنان مستقل از چگالی است؟ مطمئناً نه! در بدست آوردن فرمول (۴۳.۴۳)، و البته بقیه فرمول‌های این فصل، فرض کردیم که میانگین مسیر آزاد بین برخوردها کوچک‌تر از هر کدام از دیواره‌های مخزن باشد. هرگاه چگالی گاز آن‌قدر کم باشد که مولکول فرصت مناسبی برای عبور از یک دیواره‌ی مخزن به سمت دیگری، بدون هیچ برخوردی نداشته باشد، هیچ کدام از محاسبات مطرح شده در این فصل کاربرد درستی ندارند. در چنین موردی به نظریه‌ی جنبشی بازمی‌گردیم و محاسبات را با جزئیات آن‌چه اتفاق می‌افتد دوباره بازنویسی می‌کنیم.

Summary | If τ is the mean time between collisions;
 The mean no. of collisions a particle suffers in time T is T/τ .
 The probability of a collision in the next dt is dt/τ .
 The probability that no collision occurs in time t is $e^{-t/\tau}$ velocity
 The "mean free path" is the mean distance traveled between collisions $l = v\tau$
 If there are n_0 objects/vol to hit, each with crosssection σ , $l\sigma n_0 = 1$. ^{Mobility}
 If a force F acts on the particle it drifts with a mean vel. $v_{\text{drift}} = \mu F = \frac{e}{m} F$
 If there are n_a of these particles/vol, and n_a varies in space x , then
 The current of particles/area sec. $= \frac{1}{3} l v \frac{dn_a}{dx} = \mu k T \frac{dn_a}{dx} = D \frac{d}{dx} \left(\frac{n_a}{m_a} \right)$ ^{Defines Diffusion Constant}
 In temp. gradient Heat flow/area sec. $= \kappa \frac{dT}{dx}$ $\kappa \approx (5/4) k n_a l v = \text{Heat Conductivity}$