شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 25
درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۲۵
مترجم: محمد فتحی
ویراستار و حروفچین: اسرا رضافدایی، علی باقری کوچکسرائی
نسخه‌ی ۱.۰ بهار ۱۳۹۹
حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این صفحه مخصوصاً خالی گذاشته شده است.

فصل ۲۵

سیستم‌های خطی و دوره

۱.۲۵ معادلات دیفرانسیل خطی

در این فصل بیشتر به جنبه‌هایی از سیستم‌های نوسانی که در حالت‌های کلی مشاهده می‌شوند خواهیم پرداخت تا جنبه‌هایی از سیستم که تنها در موارد خاصی توضیح داده‌ایم. برای سیستم مشخص، معادله دیفرانسیلی را که حل می‌کردیم برابر بود با:

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲}+\gamma m\frac{dx}{dt}+m\omega_۰^۲x=F(t). \tag{۱.۲۵}$$

حال این ترکیب خاص از "عملگرها" که بر روی متغیر x عمل می‌کنند دارای این خاصیت جالب است که اگر ما به جای x قرار دهیم $(x+y)$، سپس ما مجموع همان عملگرها را بر روی x و y به دست خواهیم آورد و یا اگر x را در a ضرب کنیم، سپس a برابر ترکیب قبلی را بدست می‌آوریم و به سادگی می‌توان آن را اثبات کرد. به خاطر سادگی در نوشتار، و اینکه نوشتن تمام ترم‌های معادله (۱.۲۵) خسته کننده است ما تنها از نماد $\underline{L}\,(x)$ به جای آن استفاده خواهیم کرد. وقتی که ما این نماد را می‌بینیم به معنی سمت چپ معادله (۱.۲۵) است که در آن x جایگذاری شده است. با این سیستم نوشتار، $\underline{L}\,(x+y)$ به معنی زیر خواهد بود:

$$\underline{L}(x+y)=m\frac{d^۲(x+y)}{dt^۲}+\gamma m\frac{d(x+y)}{dt}+m\omega_۰^۲(x+y). \tag{۲.۲۵}$$

(ما در زیر $\underline{L}$ خط می‌کشیم تا به خودمان یادآوری کنیم که این یک تابع معمولی نیست) گاهی به آن نوشتار عملگری نیز گفته می‌شود اما مهم نیست که آن را چه می‌نامیم چرا که فقط "خلاصه نویسی" است.

اولین گذاره‌ی ما عبارت بود از:

$$\underline{L}(x+y)=\underline{L}(x)+\underline{L}(y), \tag{۳.۲۵}$$

البته از این حقیقت ناشی می‌شود که $a\,(x+y)=ax+ay, d\,(x+y)\,/dt=dx/dt+dy/dt$

گذاره‌ی دوم ما عبارت بود از (برای ثابت a):

$$\underline{L}(ax)=a\underline{L}(x). \tag{۴.۲۵}$$

(در واقع (۳.۲۵) و (۴.۲۵) بسیار به یکدیگر نزدیک هستند؛ زیرا اگر در (۳.۲۵) قرار دهیم $x + x$، این معادل است با اینکه در (۴.۲۵) قرار دهیم $a = ۲$ و بالعکس)

در مسائل پیچیده‌تر ممکن است مشتقات و ترم‌های بیشتری در $\underline{L}$ وجود داشته باشد. سوال قابل توجه و جالب این است که در این نوع مسائل پیچیده آیا معادلات (۳.۲۵) و (۴.۲۵) برقرار هستند یا نه. اگر برقرار باشند به چنین مسائلی مسئله خطی گفته می‌شود. در این فصل به دلیلی خطی بودن سیستم به توضیح برخی از خصوصیاتی که وجود دارند خواهیم پرداخت تا عمومیت برخی از نتایجی را که در تحلیل برخی مسائل خاص به دست آوردیم ارزیابی کنیم.

حال اجازه دهید برخی از خصوصیات معادلات دیفرانسیل خطی را مطالعه کنیم، معادلاتی که پیش‌تر آنها را با معادله مشخص (۱.۲۵) نمایش داده‌ایم و به دقت مطالعه کرده‌ایم. اولین خصوصیت جالب این است که: فرض کنید می‌خواهیم معادله دیفرانسیل را برای حالت گذرا کنیم که به معنی ارتعاشات آزاد بدون تحریک خارجی است. یعنی می‌خواهیم معادله دیفرانسیل زیر را حل کنیم:

$$\underline{L}(x) = ۰. \qquad (۵.۲۵)$$

فرض کنید که به هرطریق ممکن یک پاسخ مشخص که نام آن را $x_۱$ می‌گذاریم را پیدا کرده باشیم. به این معنی که یک $x_۱$ داریم که $\underline{L}(x_۱) = ۰$. حال توجه می‌کنیم که $ax_۱$ نیز یک پاسخ معادله است. ما می‌توانیم این پاسخ مشخص را در هر ثابتی ضرب کنیم و یک پاسخ جدید بدست آوریم. به عبارتی دیگر اگر ما یک حرکت با "اندازه‌ای" مشخص داشته باشیم، سپس حرکتی با بزرگی دو برابر نیز یک پاسخ است. اثبات: $\underline{L}(ax_۱) = a\underline{L}(x_۱) = a \cdot ۰ = ۰$.

سپس فرض کنید که به هر طریقی که شده نه تنها یک پاسخ $x_۱$، بلکه پاسخ دیگری مانند $x_۲$ را نیز پیدا کرده‌ایم. (به یاد آورید وقتی که ما $x = e^{i\alpha t}$ را برای یافتن پاسخ گذرا جایگذاری کردیم، ما دو مقدار برای α بدست آوردیم که به معنی دو پاسخ $x_۱$ و $x_۲$ است.) حال اجازه دهید نشان دهیم که ترکیب $(x_۱ + x_۲)$ نیز یک پاسخ معادله است. به عبارت دیگر اگر قرار دهیم $x = x_۱ + x_۲$، x نیز یک پاسخ معادله است. چرا؟ زیرا اگر $\underline{L}(x_۱) = ۰$ و $\underline{L}(x_۲) = ۰$، سپس $\underline{L}(x_۱ + x_۲) = \underline{L}(x_۱) + \underline{L}(x_۲) = ۰ + ۰ = ۰$. در نتیجه اگر ما تعدادی پاسخ برای حرکت یک سیستم خطی بدست آورده باشیم، می‌توانیم آنها را به یکدیگر اضافه کنیم.

با ترکیب این دو ایده مشاهده می‌کنیم که ما می‌توانیم ۶ برابر اولی را به ۲ برابر دومی اضافه کنیم. اگر $x_۱$ یک پاسخ باشد، $\alpha x_۱$ نیز پاسخ معادله است. از این رو هر مجموعی از این دو پاسخ، مانند $(\alpha x_۱ + \beta x_۲)$ نیز یک پاسخ معادله است. و اگر ما قادر بشویم که سه پاسخ بدست آوریم، سپس می‌توان دید که ترکیب این سه پاسخ خود نیز یک پاسخ معادله است و به همین صورت. مشاهده می‌شود که تعداد چیزهایی که ما "پاسخ مستقل[۱]" می‌نامیم و برای مسئله نوسانی‌مان بدست آوردیم برابر ۲ است. تعداد پاسخ‌های مستقلی که بدست آوریم در حالت کلی وابسته به چیزی است که آن را تعداد درجات آزادی سیستم می‌نامیم. ما این موضوع را به صورت جزئی توضیح نمی‌دهیم، اما اگر ما یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو داشته باشیم، تنها دو پاسخ مستقل وجود خواهد داشت. و ما هر دو را به دست آورده‌ایم در نتیجه کلی‌ترین حالت پاسخ را در دست داریم.

حال اجازه دهید به مسئله‌ی دیگری بپردازیم که مربوط می‌شود به سیستم در حالتی که تحت نیروی

---

[۱] پاسخ‌هایی را که نمی‌توان بر حسب ترکیب خطی از یکدیگر نوشت را مستقل می‌نامیم.

خارجی قرار دارد. فرض کنید که معادله زیر را داشته باشیم.

$$\underline{L}(x) = F(t), \tag{۶.۲۵}$$

و در نظر بگیرید که یک پاسخ خصوصی آن را پیدا کرده‌ایم. اجازه دهید که بگوییم پاسخ "Joe"، x_J باشد به طوری که $\underline{L}\,(x_J) = F\,(t)$. فرض کنید که می‌خواهیم یک پاسخ دیگر را نیز پیدا کنیم. در نظر بگیرید که یکی از پاسخ‌های نوسانات غیر اجباری (۵.۲۵) را به پاسخ جو اضافه کنیم. سپس با استفاده از معادله (۳.۲۵) مشاهده می‌شود که:

$$\underline{L}(x_J + x_۱) = \underline{L}(x_J) + \underline{L}(x_۱) = F(t) + ۰ = F(t). \tag{۷.۲۵}$$

از این رو می‌توان به پاسخ معادله ارتعاشات اجباری هر پاسخ معادله ارتعاشات آزاد را اضافه کرد به طوری که مجموع آنها نیز پاسخ معادله باشد. پاسخ آزاد، پاسخ گذرا نیز نامیده می‌شود.

وقتی که هیچ نیروی اعمالی نداریم و ناگهان یکی اعمال می‌کنیم، پاسخ پایدار را که با پاسخ موج سینوسی بدست آوردیم را به صورت آنی بدست نخواهیم آورد. اما برای مدتی پاسخ گذرایی وجود خواهد داشت که اگر به اندازه کافی صبر کنیم از بین خواهد رفت. پاسخ "اجباری" از بین نمی‌رود زیرا همواره توسط نیروی خارجی تحریک می‌شود. نهایتاً برای بازه‌های زمانی طولانی، پاسخ یکتا است اما در ابتدا حرکت برای شرایط مختلف متفاوت خواهد بود که بستگی به نوع شروع حرکت سیستم دارد.

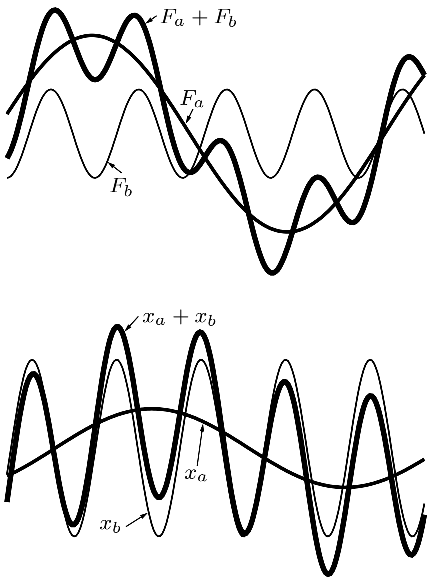
۲.۲۵ برهم‌نهی پاسخ‌ها

حال به یکی دیگر از گذاره‌های جالب می‌رسیم. فرض کنید که یک نیروی تحریک مشخص F_a داشته باشیم (اجازه دهید بگوییم یک فرم نوسانی از نیرو با فرکانس $\omega = \omega_a$، اما نتایج برای تمام شکل های تابع F_a صحت خواهد داشت) و برای حرکت اجباری معادله را حل کرده‌ایم (با و یا بدون در نظر گرفتن پاسخ گذرا، که البته تفاوتی نمی‌کند). حال فرض کنید که یک نیروی دیگر مانند F_b نیز اعمال شود و ما همان مسئله را برای این نیروی متفاوت F_b حل کنیم. حال تصور کنید که کسی بگوید "من یک مسئله جدید برای شما دارم تا حل کنید، من نیروی $F_b + F_a$ را دارم." آیا می‌توانیم که مسئله را حل کنیم؟ البته که می‌توانیم، زیرا پاسخ متشکل از مجموع پاسخ های x_a و x_b برای نیروهای جداگانه F_a و F_b است که یک حالت قابل توجه است. اگر از (۳.۲۵) استفاده کنیم خواهیم دید که:

$$\underline{L}(x_a + x_b) = \underline{L}(x_a) + \underline{L}(x_b) = F_a(t) + F_b(t). \tag{۸.۲۵}$$

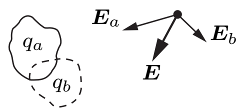
این یک مثال برای چیزی است که اصل برهم‌نهی[۲] برای سیستم‌های خطی نامیده می‌شود و بسیار مهم است. این اصل به این معنی است که اگر ما یک نیروی پیچیده که قابل شکستن به هر طریقی مناسب به یک مجموع از اعضای جداگانه باشد را داشته باشیم و هر کدام از این اعضا به نوعی ساده باشند، از این جهت که برای هر عضو بتوانیم معادله را حل کنیم، سپس پاسخ نیروی کلی نیز در دسترس خواهد بود زیرا تنها کافی است بخش‌های مختلف پاسخ را به یکدیگر اضافه کنیم به همان صورت که نیروی کلی از اعضای مختلف تشکیل شده است (شکل. ۱.۲۵).

[2] principle of superposition



شکل ۱.۲۵: مثالی از اصل برهم‌نهی برای سیستم‌های خطی.

اجازه دهید مثال دیگری از اصل برهم‌نهی ارائه دهیم. در فصل ۱۲ ما گفتیم که این یکی از زیباترین واقعیت‌های قوانین الکتریسیته است که اگر ما یک بار الکتریکی گسترده q_a را داشته باشیم و میدان E_a ناشی از این بار در مکان مشخص p را محاسبه کنیم و اگر از سوی دیگر یک گروه از بارهای الکتریکی q_b را داشته باشیم و میدان E_b ناشی از آنها را در همان نقطه محاسبه کنیم، سپس اگر هر دو توزیع بار هم زمان حضور داشته باشند، میدان E در p از مجموع $E_a + E_b$ ناشی از $q_a + q_b$ تشکیل می‌شود. به عبارت دیگر اگر ما یک میدان ناشی از یک بار الکتریکی مشخص را داشته باشیم سپس میدان ناشی از چندین بار الکتریکی تنها از جمع برداری میدان‌های بدست آمده از تک تک بارهای الکتریکی بدست می‌آید. این دقیقا معادل گزاره بالا است که اگر ما نتیجه حاصل از اعمال دو نیرو در زمان‌های مختلف را بدانیم، سپس اگر نیرو را مجموع دو نیرو در نظر بگیریم، پاسخ از مجموع پاسخ‌های ناشی از نیروهای اولیه بدست می‌آید.



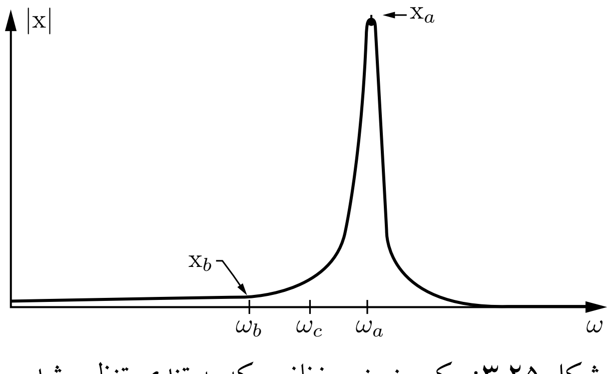
شکل ۲.۲۵: اصل برهم‌نهی در الکترواستاتیک.

دلیل صادق بودن این گزاره در الکتریسیته این است که قوانین الکتریسیته، معادلات ماکسول، که میدان الکتریکی را تعیین می‌کنند به صورت معادلات دیفرانسیل خطی ظاهر می‌شوند، به این معنی که دارای خصوصیت (۳.۲۵) می‌باشند. چیزی که معادل نیرو است، بار الکتریکی است که میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند و معادله‌ای که میدان الکتریکی را بر حسب بار الکتریکی تعیین می‌کند خطی است.

به عنوان یک مثال جالب دیگر از این گزاره اجازه دهید بپرسیم چطور ممکن است که بر روی یک ایستگاه رادیویی مشخص تنظیم شویم در حالی که در همین زمان تمام ایستگاه‌های رادیویی دیگر در حال

پخش برنامه هستند. ایستگاه رادیویی به صورت کلی یک میدان الکتریکی با فرکانس بالا را منتشر می‌کند که روی آنتن رادیوی ما اثر می‌گذارد، این درست است که دامنه نوسان برای حمل سیگنال ما مدوله[۳] و تغییر می‌کند، اما این تغییر بسیار کند است و ما نگران آن نخواهیم بود. وقتی کسی می‌شنود "این ایستگاه با فرکانس ۷۸۰ کیلو سیکل در حال پخش است" این اشاره به این دارد که ۷۸۰۰۰۰ نوسان در هر ثانیه فرکانس میدان الکتریکی آنتن ایستگاه است و آن الکترون های آنتن ما را در این فرکانس بالا و پایین می‌راند. حال در همین زمان شاید در همین شهر ایستگاه رادیویی دیگری داشته باشیم که در فرکانس دیگری منتشر می‌شود و به طور مثال ۵۵۰ کیلو سیکل بر ثانیه، سپس الکترون‌های موجود در آنتن ما در حال تحریک با این فرکانس نیز هستند. حال سوال این است که چطور ما می‌توانیم سیگنال‌هایی را که با فرکانس ۷۸۰ کیلو سیکل وارد رادیو می‌شوند را از آنهایی که با فرکانس ۵۵۰ کیلو سیکل وارد می‌شوند جدا کنیم؟ قطعاً ما به هر دو ایستگاه به طور هم زمان گوش نمی‌کنیم.

با توجه به اصل برهم‌نهی[۴] پاسخ یک مدار الکتریکی در رادیو، بخش اول آن که مدار خطی است، به نیروهایی که به خاطر میدان $F_a + F_b$ در حال اعمال هستند، $x_a + x_b$ است. از این رو این‌طور به نظر می‌رسد که ما هرگز قادر نخواهیم بود تا آنها را از هم جدا کنیم. در حقیقت به نظر می‌رسد که اصل بر هم‌نهی اصرار دارد که ما نمی‌توانیم مانع داشتن هر دو آنها در سیستم باشیم. اما به یاد بیاورید که در تشدید یک مدار، منحنی پاسخ یا مقدار x بر واحد F بر حسب تابعی از فرکانس مانند شکل ۳.۲۵ است. اگر این یک مدار با Q بالا بود، پاسخ یک ماکزیمم بسیار تیز را نشان میداد. حال فرض کنید که دو ایستگاه به لحاظ قدرت قابل مقایسه باشند، به این معنی که دو نیرو دارای دامنه یکسانی هستند. پاسخی که دریافت میکنیم مجموع x_a و x_b خواهد بود. اما در شکل ۳.۲۵، x_a بسیار عظیم است در حالی که x_b کوچک است. در نتیجه علی‌رغم این حقیقت که دو سیگنال دارای قدرت یکسانی هستند، وقتی آنها از مدار رزنانس تیز که بر روی ω_a تنظیم شده است عبور می‌کنند، فرکانس انتشار یک ایستگاه و سپس پاسخ به این ایستگاه بسیار بزرگ‌تر از دیگری خواهد بود. بدین‌سان پاسخ کلی در حالی که هر دو سیگنال در حال اعمال هستند تقریباً به طور کامل از ω_a ساخته شده است و ما ایستگاهی را که می‌خواستیم انتخاب کرده‌ایم.



شکل ۳.۲۵: یک منحنی رزنانس که به تندی تنظیم شده.

حال پس تنظیم کردن چه می‌شود؟ چطور آن را انجام دهیم؟ ما $\omega_\circ$ را با تغییر دادن L و یا C مدار تغییر می‌دهیم، زیرا فرکانس مدار ترکیبی از L و C است. به طور خاص اکثر رادیوها طوری ساخته شده‌اند که شما

---

[3] modulated
[4] superposition

می‌توانید ظرفیت خازن را تغییر دهید. وقتی ما رادیو را دوباره موج‌یابی می‌کنیم، می‌توانیم تنظیمات صفحه مدرج رادیو را عوض کنیم که در نتیجه فرکانس طبیعی مدار به طور مثال به ω_c تغییر می‌کند. در این شرایط ما هیچ‌کدام از ایستگاه‌ها را نمی‌شنویم و تنها سکوت دریافت می‌کنیم، البته به شرطی که ایستگاه دیگری با فرکانس ω_c وجود نداشته باشد. اگر ما به تغییر ظرفیت خازن تا زمانی که رزنانس منحنی بر روی ω_b قرار بگیرد ادامه دهیم، بدیهی است که ایستگاه دیگر را خواهیم شنید. تنظیم رادیو این چنین است و همان اصل برهم‌نهی است که با تشدید پاسخ ترکیب شده است.[۵]

برای جمع‌بندی این بحث اجازه دهید تا به صورت کیفی توصیف کنیم که چه اتفاقی می‌افتد اگر ما به تحلیل یک مسئله خطی به همراه یک نیروی پیچیده ادامه دهیم. جدای از تعداد زیادی فرآیندهای ممکن، دو روش بخصوص کاربردی و عمومی وجود دارد که به وسیله آن می‌توانیم مسئله را حل کنیم. یک روش این است که فرض کنید ما می‌توانیم مسئله را برای نیروهای خاص شناخته شده مانند موج سینوسی با فرکانس‌های مختلف حل کنیم. ما می‌دانیم که حل مسئله برای یک موج سینوسی مانند بازی بچه‌ها است. در نتیجه ما نمونه‌های به "اصطلاح بچه‌گانه" را داریم. حال سوال این است که آیا نیروی پیچیده‌ی ما قابل بیان بر حسب دو و یا چند نیروی بچه‌گانه است یا خیر؟ در شکل ۱.۲۵ ما از پیش یک منحنی پیچیده را داشتیم و البته می‌توانیم آن را با اضافه کردن موج‌های سینوسی بیشتر پیچیده‌تر کنیم. در نتیجه کاملاً ممکن است که منحنی‌های خیلی پیچیده به‌دست آوریم. در حقیقت عکس آن نیز صادق است. به طور عملی هر منحنی را می‌توان با اضافه کردن تعداد بی‌شمار موج سینوسی با طول موجهای مختلف (یا فرکانس‌های مختلف) به‌دست آورد که برای هر کدام از آنها پاسخ را می‌دانیم. ما تنها باید بدانیم که چه مقدار از هر موج سینوسی را برای ساخت F اضافه کنیم و سپس پاسخ ما، x، مجموع موج‌های سینوسی F است که هر کدام ضرب در نسبت موثر x به F می‌شود. این روش پاسخ را "تبدیل فوریه[۶]" و یا "آنالیز فوریه[۷]" می‌نامند. ما در اینجا به انجام این تحلیل نخواهیم پرداخت، ما تنها می‌خواهیم ایده آن را توضیح دهیم.

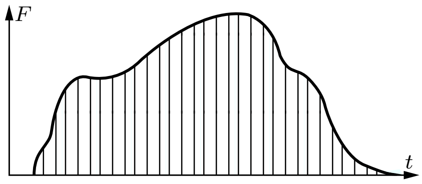
روشی دیگری که می‌توان مسئله پیچیده‌مان را با آن حل کنیم، روش جالبی است که در ادامه می‌آید. فرض کنید که با استفاده از تلاش ذهنی زیاد می‌توانستیم مسئله را برای یک نیروی خاص، مثلا یک ضربه، حل کنیم. نیرو به سرعت اعمال و برداشته و تمام می‌شود. درواقع تنها کافی است پاسخ را برای یک ضربه با توان واحد به‌دست آوریم، سپس هر توان دیگر را می‌توان با ضرب یک ضریب مناسب بدست آورد. ما می‌دانیم که پاسخ x برای یک ضربه، نوسان با دمپینگ است. حال در مورد دیگر نیروها چه می‌توان گفت، به طور مثال برای نیروی شبیه شکل ۴.۲۵؟

این نوع نیرو را می‌توان مشابه توالی ضربات چکش در نظر گرفت. در ابتدا نیرویی وجود ندارد و ناگهان یک نیروی پایدار وجود دارد، ضربه، ضربه، ضربه و...سپس ناگهان متوقف می‌شود. به عبارت دیگر تصور می‌کنیم که نیروی پیوسته یک سری از ضربه‌های به یکدیگر نزدیک است. حال ما نتیجه را برای یک ضربه می‌دانیم در نتیجه حاصل برای تمام سری‌های ضربه‌ها برابر تمام سری پاسخ‌های نوسانی با دمپینگ خواهد بود. حاصل منحنی برای ضربه اول و سپس منحنی برای ضربه دوم را به آن اضافه می‌کنیم و منحنی برای ضربه سوم و...به همین ترتیب ادامه خواهد داشت. به همین دلیل اگر ما پاسخ را برای یک ضربه داشته

[۵]در دریافت کننده‌های superheterodyne عملیات واقعی بسیار پیچیده‌تر است. تقویت کننده‌ها همه بروی فرکانس ثابتی (که به فرکانس IF معروف است) تنظیم شده اند و یک نوسانگر با فرکانس متغیر قابل تنظیمی که با سیگنال ورودی درمدار غیر خطی ترکیب شده است تا یک فرکانس جدید (اختلاف فرکانس سیگنال و نوسانگر) برابر فرکانس IF تولید کند که سپس تقویت می‌شود. این موضوع در فصل ۵۰ توضیح داده می‌شود.

[6]Fourier transforms

[7]Fourier analysis



شکل ۴.۲۵: یک نیروی پیچیده را می‌توان به صورت توالی یک سری ضربه‌های تیز در نظر گرفت.

باشیم، می‌توانیم به صورت ریاضیاتی پاسخ کامل برای هر تابع دلخواه را نمایش دهیم. ما پاسخ را برای هر نیروی دیگر به سادگی با انتگرال‌گیری بدست می‌آوریم. این تکنیک به روش تابع گرین[۸] معروف است. یک تابع گرین، پاسخ به یک ضربه است و روش تحلیل هر نیرویی با کنار هم قرار دادن پاسخ ضربه‌ها، روش تابع گرین نامیده می‌شود.

اصول فیزیک موجود در هر دوی این ترفندها بسیار ساده‌اند، شامل معادلات خطی که آنها نیز به سادگی قابل فهم هستند. اما مسائل ریاضیاتی که درگیر هستند، انتگرال‌گیری‌های پیچیده و غیره در حال حاضر برای ما کمی پیشرفته هستند که بخواهیم به آنها بپردازیم. احتمالاً شما روزی بعد از داشتن یک سری تمرینات ریاضیاتی بیشتر به آن باز خواهید گشت. اما ایده بسیار ساده است.

نهایتاً ما چند توجیه می‌آوریم که چرا سیستم های خطی خیلی مهم هستند. پاسخ ساده است، زیرا ما می‌توانیم آنها را حل کنیم! از این رو در بیشتر مواقع ما مسائل خطی را حل می‌کنیم. ثانیاً (و مهم‌ترین دلیل) به نظر می‌رسد قوانین اساسی فیزیک معمولاً خطی هستند. به طور مثال قوانین ماکسول برای الکتریسیته خطی هستند. تا آنجا که ما می‌دانیم، قوانین مکانیک کوانتوم نیز به صورت معادلات خطی ظاهر می‌شوند. به این دلیل است که ما زمان زیادی را بر روی معادلات خطی صرف می‌کنیم، زیرا اگر ما معادلات خطی را درک کنیم، آماده می‌شویم که اساس مسائل بسیاری را درک کنیم.

ما به موقعیت دیگری اشاره می‌کنیم معادلات خطی در آن پیدا می‌شوند. وقتی جابه‌جایی‌ها کوچک هستند، توابع زیادی را می‌توان به صورت خطی تقریب زد. به طور مثال اگر ما یک پاندول ساده داشته باشیم، معادله حرکت صحیح آن به صورت زیر خواهد بود:

$$d^۲\theta/dt^۲ = -(g/L)\sin\theta. \qquad (۹.۲۵)$$

این معادله را می‌توان با استفاده از توابع بیضوی حل کرد اما راحت‌ترین روش حل آن روش عددی است. همانطور که در فصل ۹ برای معادلات حرکت نیوتن نشان داده شد. به طور معمول یک معادله غیرخطی را به روشی به جز روش عددی نمی‌توان حل کرد. حال برای مقادیر کوچک θ، به طور عملی $\sin\theta$ را می‌توان با θ برابر قرار داد و معادله خطی خواهد شد. مشاهده می‌شود که موارد بسیاری وجود دارند که اثرات کوچک، خطی هستند. در این مثال تاب خوردن پاندول در کمان‌های کوچک را می‌توان نام برد. به عنوان یک مثال دیگر اگر یک فنر را کمی بکشیم، نیرو متناسب با مقدار کشیدگی خواهد بود. اگر به سختی بکشید، فنر خواهد شکست و نیرو تابعی کاملاً متفاوت برحسب فاصله خواهد بود! معادلات خطی مهم هستند. در حقیقت آن‌قدر مهم هستن که شاید در پنجاه درصد مواقع ما در حال حل معادلات خطی در فیزیک و مهندسی هستیم.

[8] Green's function method

۳.۲۵ نوسانات در سیستم‌های خطی

حال اجازه دهید مباحثی را که در چند فصل گذشته در مورد آنها صحبت کرده‌ایم را دوره کنیم. این خیلی ساده است که فیزیک نوسانگرها به وسیله ریاضیات نامفهوم گردد. فیزیک در واقع بسیار ساده است و اگر ریاضیات را برای یک دقیقه فراموش کنیم، خواهیم دید که ما قادر به درک هر چیز در حال رخ دادن در یک سیستم در حال نوسان خواهیم بود. ابتدا، اگر ما تنها فنر و وزنه داشته باشیم فهم اینکه چرا سیستم نوسان میکند خیلی ساده خواهد بود (این نوسان نتیجه اینرسی است). ما جرم را پایین می‌کشیم و نیرو آن را به عقب و به سمت بالا می‌کشد، هنگامی که از نقطه صفر عبور می‌کند، جایی که تمایل به توقف در آن دارد، نمی‌تواند به صورت ناگهانی متوقف شود. زیرا به خاطر ممنتوم خود به حرکت ادامه می‌دهد و به سمت دیگر تاب می‌خورد و همین طور جلو و عقب. در نتیجه اگر اصطکاک وجود نداشت، توقع یک حرکت نوسانی را داشتیم و قطعاً یکی بدست می‌آوردیم. اما حتی اگر کمی اصطکاک وجود داشته باشد، در سیکل برگشت نوسان به اندازه بار اول بلند نخواهد بود.

حال سیکل به سیکل چه اتفاقی در حال رخ دادن است؟ این بستگی به نوع و مقدار اصطکاک دارد. فرض کنید ما می‌توانیم یک نوع نیروی اصطکاک را که همواره و در طول تغییر دامنه نوسان متناسب با نیروهای دیگر از جمله نیروی اینرسی و فنر باقی می‌ماند را ایجاد کنیم. به عبارت دیگر برای نوسان کوچک اصطکاک باید کوچک‌تر از نوسانات بزرگ باشد. اصطکاک معمولاً این خصوصیت را ندارد، در نتیجه با هدف ایجاد یک اصطکاک که مستقیماً متناسب سرعت باشد باید یک نوع اصطکاک خاص و با دقت ابداع شود که برای نوسان‌های بزرگ قوی‌تر و برای نوسان‌های کوچک ضعیف‌تر باشد. اگر چنین اصطکاکی داشتیم، سپس در پایان هر سیکل متوالی سیستم در همان شرایط است که در شروع داشته است به جز اینکه دامنه نوسان کمی کوچک‌تر است. تمام نیروها با تناسب یکسانی کوچک‌تر هستند. نیروی فنر کاهش پیدا کرده است، اثرات اینرسی کمتر هستند زیرا شتاب‌ها ضعیف‌تر هستند و همچنین به واسطه طراحی دقیق ما نیروی اصطکاک نیز کمتر خواهد بود. وقتی ما این نوع اصطکاک را داشته باشیم، متوجه می‌شویم که هر نوسان معادل اولین نوسان است، به جز اینکه دامنه آن کاهش پیدا کرده است. اگر دامنه نوسان اول به اندازه ۹۰ درصد شروع نوسان کاهش پیدا کند، نوسان بعدی به اندازه ۹۰ درصد آن ۹۰ درصد کاهش پیدا خواهد کرد و به همین ترتیب اندازه‌های نوسان‌ها در هر سیکل با نسبت یکسانی از خودشان کاهش پیدا کرده‌اند. یک تابع نمایی منحنی است که دقیقا همین کار را انجام می‌دهد. این تابع در بازه‌های زمانی برابر با ضریب یکسانی تغییر میکند. به این صورت که اگر دامنه یک سیکل نسبت به سیکل قبلی را a بنامیم، سپس دامنه بعدی $a^۲$ و بعد از آن $a^۳$ خواهد بود. در نتیجه دامنه یک ثابت به توان تعداد سیکل‌های گذرانده خواهد بود.

$$A = A_{\circ} a^n. \qquad (۱۰.۲۵)$$

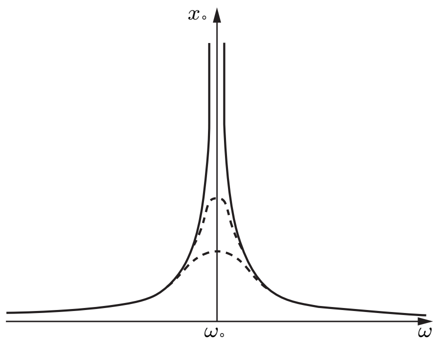
اما البته $n \propto t$ است و در نتیجه کاملاً واضح است که پاسخ عمومی یک نوع نوسان سینوسی و کسینوسی، ωt ضرب در دامنه‌ای که کم و بیش به صورت b^t است. اما اگر b مثبت و کوچکتر از یک باشد می‌توان آن را به صورت e^{-c} نوشت. به این دلیل است که پاسخ به صورت $e^{-ct}\cos\omega_{\circ} t$ است، بسیار ساده است.

چه اتفاقی می‌افتد اگر اصطکاک خیلی هم مصنوعی نباشد؟ به طور مثال سایش معمولی بر روی میز به طوری که نیروی اصطکاک یک مقدار ثابت و مستقل از اندازه نوسان است که در هر نیم‌سیکل جهت خود را عوض می‌کند. با این شرایط معادله دیگر خطی نخواهد بود و حل آن مشکل خواهد بود و باید با روش‌های عددی ارائه شده در فصل ۹ و یا با در نظر گرفتن هر نیم‌سیکل و به صورت جداگانه حل شود. روش عددی

قدرتمندترین روش است و هر معادله‌ای را می‌توان با آن حل کرد. تنها در مسائل ساده است که می‌توان از روش‌های تحلیلی ریاضیاتی استفاده کرد.

تحلیل ریاضی ابزار عمده‌ای که گفته می‌شود نیست، از آن تنها برای حل ساده‌ترین مسائل ممکن استفاده می‌شود. به محض اینکه مسئله کمی پیچیده شود، فقط کمی پیچیده‌تر، دیگر به صورت تحلیلی قابل حل نخواهد بود. اما روش عددی که پیش‌تر معرفی شده است را می‌توان برای حل هر معادله فیزیکی مد نظر مورد استفاده قرار داد.

حال در مورد منحنی رزنانس چطور؟ چرا یک رزنانس وجود دارد؟ ابتدا برای یک دقیقه تصور کنید که اصطکاک وجود ندارد و چیزی داریم که می‌تواند خود نوسان کند. اگر هر بار که پاندول از مقابل ما عبور می‌کند به آن نیرو وارد کنیم، می‌توانیم کاری کنیم که به شدت حرکت کند. اما اگر چشمانمان را ببندیم و دربازه‌های زمانی یکسان و دلخواه نیرو وارد کنیم، چه اتفاقی خواهد افتاد؟ در بعضی مواقع متوجه خواهیم شد که نیرو را در جهت اشتباه حرکت وارد می‌کنیم. وقتی زمان بندی درست را داشته باشیم، هر بار نیرو وارد کردن در زمان صحیح خواهد بود، و در نتیجه پاندول بالا و بالا و بالاتر خواهد رفت. در نتیجه در غیاب اصطکاک منحنی بدست آمده شبیه منحنی با خطوط ممتد برای فرکانس‌های مختلف در شکل ۵.۲۵ خواهد بود. ما منحنی رزنانس را به صورت کیفی درک می‌کنیم. برای بدست آوردن شکل دقیق منحنی باید محاسبات ریاضی را انجام دهیم. با میل کردن $\omega \to \omega_\circ$ منحنی به سمت بی نهایت میل می‌کند که در آن $\omega_\circ$ فرکانس طبیعی نوسانگر است.



شکل ۵.۲۵: منحنی رزنانس با حضور مقادیر مختلف اصطکاک.

حال فرض کنید که کمی اصطکاک وجود دارد، سپس وقتی جابه‌جایی کوچک است، اصطکاک تاثیر زیادی بر روی آن ندارد. منحنی رزنانس مانند قبل است به جز در نزدیکی رزونانس. به جای اینکه در نزدیکی رزونانس بی‌نهایت شود، منحنی به اندازه‌ای ارتفاع می‌گیرد که کار انجام شده در هر بار اعمال نیرو در هر سیکل برای جبران کردن انرژی از دست رفته به علت اصطکاک کافی باشد. در نتیجه رأس منحنی گرد خواهد بود و به بی‌نهایت میل نمی‌کند. اگر اصطکاک بیشتر باشد رأس منحنی گردتر خواهد بود. حال شاید کسی بگوید "من تصور می‌کردم که عرض نمودار بستگی به اصطکاک دارد". بدین خاطر است که منحنی به طوری رسم می‌شود که رأس منحنی یک واحد نامیده می‌شود. اگرچه عبارت ریاضی برای فهمیدن بسیار ساده‌تر است، اگر ما فقط تمام نمودارها را با مقیاس یکسان رسم کنیم. سپس آنچه که اتفاق می‌افتد این است که اصطکاک رأس را کوتاه‌تر می‌کند! اگر اصطکاک کمتری وجود داشته باشد می‌توانیم به ارتفاع بیشتری برسیم قبل از اینکه اصطکاک آن را تقلیل دهد در نتیجه باریک‌تر به نظر می‌رسد. به این صورت که هرچه ارتفاع منحنی بیشتر باشد عرض در نصف ارتفاع ماکزیمم باریک‌تر خواهد بود.

نهایتاً حالتی را در نظر می‌گیریم که اصطکاک بسیار زیاد باشد. مشاهده می‌شود که در صورت وجود اصطکاک زیاد، سیستم به طور کلی نوسانی نخواهد بود. انرژی موجود در فنر به سختی قادر است آن را در مقابل نیروی اصطکاک حرکت دهد و در نتیجه به آهستگی به سمت نقطه تعادل حرکت می‌کند.

۴.۲۵ تشابه در فیزیک

وجه دیگر این دوره توجه کردن به این است که جرم‌ها و فنرها تنها سیستم‌های خطی نیستند و سیستم‌های دیگری نیز وجود دارند. به طور خاص سیستم‌های الکتریکی به نام مدارهای خطی وجود دارند که می‌توان تشابه کاملی با سیستم‌های مکانیکی در آنها یافت. ما هنوز دقیقاً فرا نگرفته‌ایم که چرا نحوه عملکرد هر عضو در یک مدار الکتریکی به این صورت است و این چیزی نیست که در حال حاضر خواهیم فهمید. ما شاید به صورت یک حقیقت قابل اثبات به روش تجربی ادعا کنیم که آنها به صورت گفته شده رفتار می‌کنند.

برای مثال اجازه دهید که ساده‌ترین حالت ممکن را در نظر بگیریم. ما یک تکه سیم داریم که یک مقاومت است و به آن اختلاف پتانسیل V را اعمال کرده‌ایم. حال V به این معنی است که اگر ما بار الکتریکی q را از یک سر به سر دیگر هدایت کنیم، کار انجام شده برابر qV خواهد بود. هرچه اختلاف ولتاژ بیشتر باشد، کار انجام شده در هنگام عبور بار الکتریکی از نقطه با پتانسیل بیشتر بالا به نقطه با پتانسیل پایین بیشتر خواهد بود. در نتیجه بارهای الکتریکی هنگام عبور از یک انتها به انتهای دیگر از خود انرژی آزاد می‌کنند. بارهای الکتریکی به سادگی از یک انتها به انتهای دیگر پرواز نمی‌کنند. اتم‌های داخل سیم مقاومتی را نسبت به جریان از خود نشان می‌دهند و این مقاومت از قانون زیر پیروی می‌کند که تقریباً برای تمام مواد معمولی صادق است. اگر جریان I وجود داشته باشد، به این معنی که بارهای الکتریکی زیادی در هر ثانیه به سمت پایین حرکت می‌کنند، تعدادی که در هر ثانیه در سیم به پایین حرکت می‌کنند متناسب است با اینکه با چه سختی آنها را حل می‌دهیم، به عبارت دیگر متناسب است با اینکه چه مقدار اختلاف ولتاژ وجود دارد:

$$V = IR = R(dq/dt). \qquad (۱۱.۲۵)$$

ضریب R مقاومت نامیده می‌شود و معادله به قانون اهم[۹] شهرت دارد. واحد مقاومت، اهم است که برابر است با یک ولت بر آمپر. در شرایط مکانیکی بدست آوردن نیروی اصطکاکی که متناسب با سرعت باشد سخت است. در سیستم‌های الکتریکی این کار ساده است و این قانون برای اکثر فلزات بسیار دقیق است.

ما معمولاً علاقه‌مند هستیم که بدانیم چه مقدار کار در هر ثانیه انجام شده است، مقدار اتلاف توان و یا مقدار انرژی آزاد شده هنگام حرکت رو به پایین بارهای الکتریکی داخل سیم چقدر است. وقتی ما بار الکتریکی q را در ولتاژ V حرکت می‌دهیم، کار انجام شده qV است و در نتیجه کار انجام شده در هر ثانیه برابر خواهد بود با $V\ (dq/dv)$ که برابر VI و یا همچنین $IR \cdot I = I^۲R$ است. که به آن اتلاف گرمایی گفته می‌شود. با توجه به اصل بقای انرژی، این مقدار گرمایی است که در هر ثانیه در مقاومت تولید می‌شود. به خاطر این گرما است که یک لامپ حبابی پرنور کار می‌کند.

البته خصوصیات جالب دیگری نیز در سیستم‌های مکانیکی وجود دارند، به طور مثال جرم (اینرسی) که مشاهده می‌شود تشابه الکتریکی برای اینرسی وجود دارد. این امکان وجود دارد که چیزی به نام سلف[۱۰]

[9] Ohm's Law
[10] inductor

که دارای خصوصیت القا[11] است به طوری که وقتی یک جریان شروع به حرکت در سلف کند، تمایلی به توقف ندارد. برای تغییر دادن جریان نیاز به یک ولتاژ است! اگر جریان ثابت باشد ولتاژی در القاگر وجود ندارد. مدارهای DC چیزی در مورد القا نمی‌دانند. این تنها زمانی که ما جریان را تغییر می‌دهیم است که اثرات القا خود را نشان می‌دهند. معادله برابر است با:

$$V = L(dI/dt) = L(d^۲q/dt^۲), \tag{۱۲.۲۵}$$

و واحد القا که هنری[12] نامیده می‌شود به این صورت است که اعمال یک ولت به القاگر یک هنری، تغییر یک آمپر در ثانیه در جریان ایجاد می‌کند. معادله (۱۲.۲۵) مشابه قانون نیوتن برای الکتریسیته است. V معادل F ، L معادل m و I معادل سرعت است. تمام معادلات متعاقباً برای هر دو نوع سیستم دارای استخراج یکسانی هستند زیرا در تمام معادلات ما می‌توانیم هر حرفی را به معادل مشابه آن حرف تغییر دهیم و همان معادله را به‌دست آوریم. هر چیزی را که استنتاج کنیم دارای معادل در هر دو سیستم خواهد بود.

حال چه چیز الکتریکی مشابه فنر مکانیکی است که در آن یک نیرو متناسب با کشیدگی بود؟ اگر ما با $F = kx$ شروع کنیم و جایگذاری کنیم $F \to V$ و $x \to q$ خواهیم داشت $V = \alpha q$. مشاهده می‌شود که چیزی وجود دارد و در حقیقت آن تنها عضو از سه المان مدارها است که ما واقعا درک می‌کنیم. زیرا ما یک جفت صفحه موازی را مطالعه کردیم و متوجه شدیم که اگر یک بار الکتریکی مشخص برابر و عکس یکدیگر در هر صفحه وجود داشته باشد، میدان الکتریکی بین آنها متناسب با اندازه بار الکتریکی خواهد بود. در نتیجه کار انجام شده برای جابه‌جایی یک واحد بار الکتریکی در فاصله یک صفحه تا صفحه دیگر دقیقا متناسب با بار الکتریکی است. این کار تعریف اختلاف پتانسیل است و این همان انتگرال خط میدان الکتریکی از یک صفحه به صفحه دیگر است. مشاهده می‌شود که به دلایل تاریخی ضریب تناسب نه C بلکه $۱/C$ نامیده شده است. این ضریب را می‌توانستند C بنامند اما این اتفاق نیفتاده است. در نتیجه داریم:

$$V = q/C. \tag{۱۳.۲۵}$$

واحد خازن فاراد[13] است. یک کولن بار الکتریکی در هر صفحه خازن یک واحدی، یک ولت اختلاف ولتاژ را نتیجه می‌دهد.

تشابه‌های ما وجود دارند و معادله متناسب با مدار نوسانی با جایگزین کردن مستقیم L برای m و q برای x و...بدست می‌آید.

$$m(d^۲x/dt^۲) + \gamma m(dx/dt) + kx = F, \tag{۱۴.۲۵}$$

$$L(d^۲q/dt^۲) + R(dq/dt) + q/C = V. \tag{۱۵.۲۵}$$

حال هر آنچه را که در مورد (۱۴.۲۵) آموختیم را می‌توان به (۱۵.۲۵) انتقال داد. هر پیامدی یکسان است، آنچنان یکسان که می‌توانیم یک کار هوشمندانه انجام دهیم.

فرض کنید که یک سیستم مکانیکی داریم که پیچیده است، نه فقط یک جرم بر روی یک فنر بلکه جرم‌های مختلفی بر روی فنرهای مختلف که همه به یکدیگر قلاب شده‌اند. ما چه کار می‌کنیم؟ آن را

[11] inductance
[12] henry
[13] farad

حل می‌کنیم؟ شاید! اما نگاه کنید، ما می‌توانیم یک مدار الکتریکی بسازیم که همان معادله را داشته باشد که ما سعی در تحلیل آن داریم! برای مثال اگر می‌خواستیم یک جرم بر روی یک فنر را تحلیل کنیم، چرا یک مدار الکتریکی نسازیم که در آن از یک القاگر متناسب با جرم، یک مقاومت متناسب با $m\gamma$ و $1/C$ متناسب با k که همه را در یک نسبت یکسان استفاده می‌کنیم. سپس این مدار الکتریکی دقیقاً مشابه سیستم مکانیکی ما خواهد بود به این صورت که هر پاسخی که q به V دهد (همچنین V طوری تنظیم می‌شود که معادل نیروهای اعمالی باشد) x در پاسخ به نیرو از خود نشان می‌داد. در نتیجه اگر ما یک چیز پیچیده با تعداد زیادی المان به هم متصل داشته باشیم، می‌توانیم تعداد زیادی از مقاومت‌ها، القاگرها و خازن‌ها را به یکدیگر متصل کنیم تا سیستم مکانیکی پیچیده را شبیه‌سازی کنیم. این کار چه مزیتی دارد؟ یک مسئله به اندازه دیگری سخت (و یا آسان) است. زیرا آنها دقیقاً معادل هستند. مزیت این نیست که بعد از کشف یک مدار الکتریکی حل معادلات ساده است (اگرچه این روشی است که توسط مهندسی الکترونیک استفاده می‌شود!)، اما به جای آن، دلیل اصلی به دنبال تشابه گشتن این است که ساخت یک مدار الکتریکی و ایجاد تغییر در چیزی از مدار ساده‌تر است.

فرض کنید یک اتومبیل طراحی کرده‌ایم و می‌خواهیم بدانیم که در یک جاده با دست اندازهای مشخص چطور ارتعاش می‌کند. ما یک مدار الکتریکی می‌سازیم با القاگرهایی برای نشان دادن اینرسی چرخ‌ها و مقاومت‌ها برای نشان دادن کمک فنرها و غیره برای نشان دادن اجزاء دیگر اتومبیل. سپس به یک جاده با دست انداز نیاز داریم. بسیار خوب ما از یک ژنراتور یک ولتاژ مشخص اعمال می‌کنیم که چنین دست اندازی را نشان دهد و سپس با اندازه‌گیری بار الکتریکی در چند خازن مشاهده می‌کنیم که چرخ سمت چپ چطور بالا و پایین می‌شود. با این اندازه‌گیری (که انجام آن ساده است) متوجه می‌شویم که بیش از حد ارتعاش می‌کند. آیا به کمک فنرهای بیشتری نیاز داریم یا کمتر؟ با چیز پیچیده‌ای مانند اتومبیل، آیا واقعاً کمک فنرها را عوض میکنیم و مسئله را دوباره حل میکنیم؟ نه! ما به سادگی یک صفحه شماره را می‌چرخانیم، شماره‌گیری عدد ۱۰، کمک فنر شماره ۳ است در نتیجه کمک فنرهای بیشتری اضافه می‌کنیم. دست اندازها بدتر هستند، ما سختی فنر را تغییر می‌دهیم (با شماره‌گیری عدد ۱۷) و همه اینها را به صورت الکتریکی تنظیم می‌کنیم، تنها با چرخاندن یک دکمه انجام می‌دهیم.

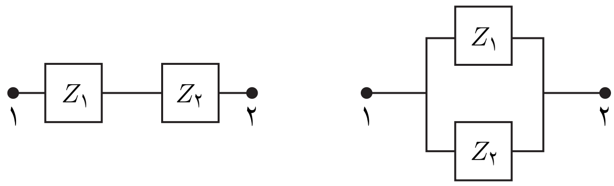
این یک کامپیوتر تشابه نامیده می‌شود. این وسیله مسئله‌ای را که می‌خواهیم حل کنیم را با ساخت یک مسئله دیگر که دارای معادله یکسان اما با شرایط طبیعی متفاوت و ساده‌تر برای ساخت، اندازه‌گیری، تنظیم کردن و از بین بردن است را تقلید می‌کند.

۵.۲۵ امپدانس‌های[۱۴] سری و موازی

نهایتاً یک بخش مهم وجود دارد که خارج از حوزه دوره کردن ما قرار دارد. این مربوط به یک مدار الکتریکی است که درآن بیشتر از یک المان مدار وجود دارد. به طور مثال وقتی ما یک القاگر، مقاومت و خازن به هم پیوسته مانند شکل ۲.۲۵ داریم، متوجه می‌شویم که تمام بار الکتریکی از تک تک هر سه عبور می‌کند در نتیجه که جریان در این تک اتصالات و در تمام نقاط سیم یکسان است. از آنجا که جریان در هر یک یکسان است، ولتاژ در طول R برابر IR، ولتاژ درطول L برابر $L\left(dI/dt\right)$ و به همین صورت است. در نتیجه کاهش کلی ولتاژ مجموع اینها است و این به معادله (۱۵.۲۵) ختم می‌شود. با استفاده از اعداد مختلط ما

[14] impedances

متوجه می‌شویم که می‌توانیم معادله را برای حرکت حالت پایا در پاسخ به یک نیروی سینوسی حل کنیم. از این رو خواهیم داشت $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$. حال $\hat{Z}$ امپدانس این مدار خاص نامیده می‌شود. این معادله به ما می‌گوید که اگر ما یک ولتاژ سینوسی $\hat{V}$ را اعمال کنیم، جریان $\hat{I}$ را خواهیم گرفت.



(الف) سری (ب) موازی

شکل ۶.۲۵: دو امپدانس متصل به صورت سری و موازی.

حال فرض کنید یک مدار پیچیده‌تر داریم که دارای دو بخش است که هر کدام برای خود دارای امپدانس‌های مشخص $\hat{Z}_1$ و $\hat{Z}_2$ است و آنها را به صورت یک سری (شکل ۶.۲۵الف) قرار داده و یک ولتاژ اعمال می‌کنیم. چه اتفاقی می‌افتد؟ حال کمی پیچیده‌تر است، اما اگر جریان در $\hat{Z}_1$ برابر $\hat{I}_1$ باشد، اختلاف ولتاژ در طول $\hat{Z}_1$ برابر $\hat{V}_1 = \hat{Z}_1\hat{I}$ است. به طور مشابه ولتاژ در طول $\hat{Z}_2$ برابر $\hat{V}_2 = \hat{Z}_2\hat{I}$ است. جریان یکسانی از هردو عبور می‌کند. از این رو ولتاژ کلی برابر مجموع ولتاژها در طول دو بخش است و برابر است با $\hat{V} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 = \left(\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2\right)\hat{I}$. این بدین معنی است که ولتاژ در کل مدار را می‌توان به صورت $\hat{V} = \hat{I}\hat{Z}_s$ نوشت که $\hat{Z}_s$ سیستم ترکیبی قرار گرفته به صورت سری از مجموع دو $\hat{Z}$ متعلق به بخش‌های جداگانه تشکیل می‌شود.

$$\hat{Z}_s = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2. \tag{۱۶.۲۵}$$

این تنها روشی نیست که اجزاء می‌توانند متصل شوند. ما همچنین می‌توانیم آنها را به روش دیگری که اتصال موازی[۱۵] نامیده می‌شود به یکدیگر متصل کنیم (شکل ۶.۲۵ب). حال ما می‌بینیم که ولتاژ داده شده در دو انتها در صورتی که سیم‌های رابط کاملاً رسانا باشند به طور موثری بر هر دو امپدانس اعمال می‌شود و باعث ایجاد جریان‌های به طور جداگانه در هرکدام می‌شود. از این رو جریان در $\hat{Z}_1$ برابر است با $\hat{I}_1 = \hat{V}/\hat{Z}_1$. جریان در $\hat{Z}_2$ نیز $\hat{I}_2 = \hat{V}/\hat{Z}_2$ است. این همان ولتاژ یکسان است. حال جریان کلی که در دو انتها فراهم شده است از مجموع جریان‌ها در دو بخش تشکیل می‌شود، $\hat{I} = \hat{V}/\hat{Z}_1 + \hat{V}/\hat{Z}_2$. این را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{V} = \frac{\hat{I}}{(1/\hat{Z}_1) + (1/\hat{Z}_2)} = \hat{I}\hat{Z}_p.$$

بدین ترتیب

$$1/\hat{Z}_p = 1/\hat{Z}_1 + 1/\hat{Z}_2. \tag{۱۷.۲۵}$$

[15] parallel

گاهی مدارهای پیچیده‌تر را می‌توان با در نظر گرفتن بخش‌هایی از آنها و کاربرد روی توالی امپدانس‌های بخش‌ها و ترکیب مدارها با یکدیگر با استفاده از قوانین بالا و مرحله به مرحله ساده‌تر کرد. اگر ما هر نوع مداری با تعداد زیادی امپدانس‌های متصل با تمام حالات ممکن داشته باشیم و اگر ما ولتاژهایی به شکل ژنراتورهای بدون امپدانس به آن اضافه کنیم (وقتی ما بار الکتریکی از آن عبور می‌دهیم، ژنراتور ولتاژ V را اضافه می‌کند) سپس اصول زیر صادق هستند. (۱) در هر نقطه اتصال، مجموع جریان‌ها به آن اتصال صفر است. به این معنی که تمام جریان‌هایی که داخل می‌شوند باید خارج شوند. (۲) اگر ما یک بار الکتریکی را حول یک حلقه بچرخانیم و به نقطه شروع برگردانیم، کار خالص انجام شده صفر است. این اصول قوانین کیرشهوف[۱۶] برای مدارهای الکتریکی نامیده می‌شوند. کاربرد سیستماتیک آنها در مدارهای پیچیده، معمولاً تحلیل این مدارها را ساده‌تر می‌کند. ما در اینجا به آنها در ارتباط با معادلات (۱۶.۲۵) و (۱۷.۲۵) اشاره می‌کنیم، برای حالتی که شما قبلاً با این مدارها برخورد کرده‌اید و شما نیاز دارید در کار آزمایشگاهی تحلیل کنید. آنها با جزئیات بیشتر در سال آینده توضیح داده خواهند شد.

---

[16] Kirchhoff's laws