

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 24

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۲۴

مترجم: محمد فتحی

ویراستار و حروفچین: زهره رشنودی، علی باقری کوچکسرائی

نسخه‌ی ۱۰ بهار ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

www.Zharfa90.ir

این صفحه مخصوصاً خالی گذاشته شده است.

فصل ۲۴

گذراها

۱.۲۴ انرژی یک نوسانگر

اگرچه این فصل گذراها نام‌گذاری شده است، بخش‌های اصلی آن به طریقی ادامه بخش آخر فصل قبل در مورد نوسان اجباری است. یکی از مشخصه‌های نوسان اجباری که تا به حال در مورد آن بحث نکرده‌ایم، انرژی در نوسان است. بیایید حالا به موضوع انرژی بپردازیم.

در یک نوسانگر مکانیکی چه مقدار انرژی جنبشی وجود دارد؟ این انرژی متناسب با مربع سرعت است. حال به نکته مهمی می‌رسیم! کمیت دلخواه A را در نظر بگیرید، که ممکن است سرعت یا چیز دیگری که ما می‌خواهیم توضیح دهیم، باشد. وقتی ما می‌نویسیم، $A = \hat{A}e^{i\omega t}$ تنها بخش حقیقی، این عدد مختلط A ، در جهان فیزیکی، درست و صادق است. به همین دلیل اگر به برخی دلایل، ما بخواهیم از مربع A استفاده کنیم، این درست نیست که مربع عدد مختلط را محاسبه کنیم و سپس بخش حقیقی آن را در نظر بگیریم، زیرا بخش حقیقی مربع یک عدد مختلط تنها مربع بخش حقیقی نیست بلکه شامل بخش موهومی نیز هست. در نتیجه وقتی می‌خواهیم انرژی را پیدا کنیم باید عدد نویسی مختلط را کنار بگذاریم تا ببینیم اجزاء داخلی آن چه چیزهایی هستند.

حال A فیزیکی حقیقی، بخش حقیقی $A_0 e^{i(\omega t + \Delta)}$ است، که برابر است با $A = A_0 \cos(\omega t + \Delta)$ ، و عدد مختلط $\hat{A}$ به صورت $A_0 e^{i\Delta}$ نوشته شده است. حال مربع این کمیت فیزیکی حقیقی برابر است با $A^2 = A_0^2 \cos^2(\omega t + \Delta)$. سپس مربع این کمیت از ماکزیمم تا صفر بالا و پایین می‌رود، شبیه مربع کسینوس. مربع کسینوس ماکزیممی برابر ۱ و مینیممی برابر صفر دارد و مقدار میانگین آن $1/2$ است.

در بسیاری مواقع ما توجهی به انرژی در یک لحظه خاص در طول نوسان نداریم؛ در موارد کاربردی بسیاری ما تنها میانگین A^2 را می‌خواهیم، یعنی، همان میانگین مربع A در طول بازه زمانی بزرگ در مقایسه با دوره نوسان. در آن مواقع، از میانگین مربع کسینوس استفاده می‌شود، در نتیجه ما قضیه‌ای که در ادامه می‌آید را خواهیم داشت: اگر A با یک عدد مختلط نشان داده شود، آنگاه میانگین A^2 برابر است با $\frac{1}{2} A_0^2$. حال A_0^2 مربع اندازه عدد مختلط $\hat{A}$ است. (این را می‌توان به روش‌های مختلف نوشت، برخی افراد دوست دارند بنویسند $|\hat{A}|^2$ ؛ دیگران می‌نویسند $\hat{A}\hat{A}^*$ ، $\hat{A}$ ضرب در مزدوج مختلط آن) ما از این قضیه در موارد زیادی استفاده خواهیم کرد.

حال اجازه دهید ما انرژی موجود در یک نوسانگر اجباری را در نظر بگیریم. معادلهٔ مربوط به نوسانگر اجباری به صورت زیر است:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma m \frac{dx}{dt} + m \omega_0^2 x = F(t). \quad (1.24)$$

البته در مسئلهٔ ما $F(t)$ تابعی کسینوسی از t است. حال اجازه دهید شرایط را تحلیل کنیم: چه مقدار کار توسط نیروی خارجی F انجام شده است؟ کار انجام شده توسط نیرو بر واحد زمان، که همان توان است، برابر حاصل ضرب نیرو در سرعت است. (ما می دانیم که کار دیفرانسیلی در زمان dt برابر $F dx$ و توان $F dx/dt$ است). بنابراین:

$$P = F \frac{dx}{dt} = m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \omega_0^2 x \left(\frac{dx}{dt} \right) \right] + \gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (2.24)$$

اما دو عبارت اول سمت راست به شکل $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right]$ نیز نوشته می شوند، که با دیفرانسیل گیری می توان آن را اثبات کرد. این بدین معنی است که بگوییم، عبارت داخل قلاب، مشتق خالص دو عبارت است که به راحتی قابل فهم هستند؛ یکی انرژی جنبشی حرکت است و دیگری انرژی پتانسیل فنر. بگذارید این کمیت را انرژی ذخیره شده بنامیم، به عبارتی، انرژی ذخیره شده در نوسان. فرض کنید که ما میانگین توان را در تعداد چرخه های (سیکل) بسیاری که نوسانگر تحت نیروی اجباری بوده و برای مدت زمان طولانی حرکت کرده است، بخواهیم. در حرکت طولانی مدت، انرژی ذخیره شده تغییری نمی کند، مشتق آن اثر میانگین صفر^۱ را می دهد. به عبارت دیگر، اگر ما میانگین توان را در حرکت طولانی مدت به دست آوریم، تمام انرژی نهایتاً به مقاومتی برابر با $\gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ ختم می شود. مقداری انرژی وجود دارد که در نوسان ذخیره شده است اما در صورتی که از تعداد چرخه های زیادی میانگین گیری کنیم این انرژی تغییری نخواهد کرد. به همین دلیل میانگین توان $\langle P \rangle$ برابر خواهد بود با:

$$\langle P \rangle = \langle \gamma m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \rangle. \quad (3.24)$$

با استفاده از روش نوشتارمان برای اعداد مختلط و قضیهٔ $\langle A^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 dt$ می توان این توان میانگین را محاسبه کرد. از این رو اگر $x = \hat{x} e^{i\omega t}$ ، آنگاه $dx/dt = i\omega \hat{x} e^{i\omega t}$. در نتیجه در این حالت میانگین توان را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \gamma m \omega^2 \langle \hat{x}^2 \rangle. \quad (4.24)$$

در فرمول نویسی مدارهای الکتریکی dx/dt با جریان I جایگزین می شود (همان dq/dt است که q متناظر x است) و $m\gamma$ متناظر مقاومت R است. از این رو نرخ از دست دادن انرژی – توان مصرفی توسط تابع تحریک – برابر حاصل ضرب مقاومت مدار در مربع میانگین جریان خواهد بود.

$$\langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = R \cdot \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt. \quad (5.24)$$

البته این انرژی باعث افزایش دما در مقاومت الکتریکی می شود که گاهی اوقات گرمایی و یا گرمایش ژول نامیده می شود.

¹zero average effect

خصوصیت جالب دیگری که می توان در موردش بحث کرد این است که چه مقدار انرژی، ذخیره شده است. این انرژی برابر اندازه توان نیست، زیرا اگرچه در ابتدا توان برای ذخیره سازی مقداری انرژی استفاده شد، بعد از اینکه سیستم به جذب توان ادامه می دهد، در طولانی مدت اتلاف گرمایی مقاومت وجود دارد و در هر لحظه مقدار مشخصی انرژی ذخیره شده وجود دارد، هم چنین ما می خواهیم میانگین انرژی ذخیره شده E را محاسبه کنیم. ما از قبل مقدار میانگین $(dx/dt)^2$ را محاسبه کرده ایم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \frac{1}{2}m\langle (dx/dt)^2 \rangle + \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2}m(\omega^2 + \omega_0^2)\frac{1}{2}x_0^2.\end{aligned}\quad (۶.۲۴)$$

حال اگر یک نوسانگر بسیار بهینه باشد و ω هم به ω_0 نزدیک باشد، به گونه ای که اندازه $|\hat{x}|$ بزرگ باشد، انرژی ذخیره شده بالا خواهد بود و ما می توانیم انرژی ذخیره شده زیادی را از نیرویی نسبتاً کوچک به دست آوریم. نیروی به حرکت درآوردن نوسان، بزرگی کار بالایی نیاز دارد، اما برای پایدار نگه داشتن آن تنها باید با اصطکاک مقابله کند. اگر اصطکاک خیلی کم باشد نوسانگر می تواند انرژی زیادی داشته باشد، و حتی اگر با شدت نوسان کند، انرژی کمی از دست خواهد داد. بهینه بودن یک نوسانگر را می توان با مقایسه مقدار انرژی ذخیره شده و مقدار کار انجام شده توسط نیرو در هر نوسان اندازه گیری کرد.

چگونه انرژی ذخیره شده با مقدار کار انجام شده در یک چرخه مقایسه می شود؟ این را Q سیستم می نامند و Q به صورت ضرب 2π در میانگین انرژی ذخیره شده، تقسیم بر کار انجام شده در یک چرخه تعریف می شود. (اگر می خواستیم بگوییم کار انجام شده «بر واحد رادیان» به جای «بر واحد چرخه»، آنگاه 2π حذف می شد.)

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}m(\omega^2 + \omega_0^2) \cdot \langle x^2 \rangle}{\gamma m \omega^2 \langle x^2 \rangle \cdot 2\pi/\omega} = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{2\gamma\omega}.\quad (۷.۲۴)$$

تنها در صورتی Q عددی کاربردی است که مقدار آن بزرگ باشد. وقتی که Q نسبتاً بزرگ باشد، معیاری از کیفیت نوسانگر به ما می دهد. افرادی تلاش کرده اند که Q را به ساده ترین و کاربردی ترین شکل تعریف کنند. تعریف های مختلف، کمی با یکدیگر متفاوت هستند اما اگر Q خیلی بزرگ باشد، تمام تعریف ها با یکدیگر هماهنگ هستند. کلی ترین تعریف پذیرفته شده، معادله (۷.۲۴) است که به ω بستگی دارد. برای یک نوسانگر خوب در نزدیکی تشدید (رزونانس)، می توان (۷.۲۴) را با قرار دادن $\omega = \omega_0$ کمی ساده کرد و خواهیم داشت $Q = \omega_0/\gamma$ ، که همان تعریف Q است که قبلاً استفاده کردیم.

برای یک مدار الکتریکی، Q چیست؟ برای فهمیدن آن ما تنها باید L را به m ، R را به $m\gamma$ و $1/C$ را به $m\omega_0^2$ تبدیل کنیم (جدول ۱-۲۳ را ببینید). Q در تشدید، $L\omega/R$ خواهد بود که ω بسامد تشدید است. اگر ما یک مدار با Q بالا را در نظر بگیریم، بدین معنی است که مقدار انرژی ذخیره شده در نوسان در مقایسه با مقدار کار انجام شده در هر چرخه توسط ماشین آلاتی که عامل نوسان هستند، بسیار بزرگ است.

۲۰۲۴ نوسانات میرا

در اینجا ما به موضوع اصلی خود، یعنی، گذراها می پردازیم. منظور ما از گذراها، پاسخ معادله دیفرانسیل در زمانی است که نیرویی وجود ندارد اما سیستم در حالت سکون نیست. (البته، اگر سیستم بدون اعمال

فصل ۲۴. گذرها

نیروی و در مبدا ساکن باشد، مسئله خوبی خواهد بود. همان جا خواهد ماند!) فرض کنید که نوسان به شکل دیگری شروع شود مثلاً توسط یک نیروی برای مدتی تحریک شده باشد و بعد ما نیروی محرک را برمی داریم. چه اتفاقی خواهد افتاد؟ بیایید یک ایده ابتدایی از اینکه برای یک سیستم با Q بالا چه اتفاقی خواهد افتاد، به دست آوریم. تا زمانی که یک نیرو اعمال می شود، انرژی ذخیره شده یکسان باقی می ماند و برای نگه داشتن آن، مقدار مشخصی کار انجام می شود. حال فرض کنید که ما نیرو را برداریم و دیگر کاری انجام نشود، در نتیجه، اتلاف هایی که انرژی تأمین شده را مصرف می کردند، دیگر انرژی آن را هدر نمی دهند، چرا که دیگر محرکی وجود ندارد. اتلاف ها مجبور به مصرف انرژی ذخیره شده، خواهند شد. فرض کنید که $Q/2\pi = 1000$ باشد، آنگاه کار انجام شده در هر چرخه $1/1000$ انرژی ذخیره شده است. از آنجا که نوسان بدون محرک خارجی صورت می گیرد، آیا منطقی نیست که در هر چرخه با از دست دادن یک هزارم انرژی E خود، که در حالت عادی از خارج تأمین می شد، به نوسان خود ادامه دهد؟ بنابراین به عنوان یک حدس (ما این کار را بعداً دقیق تر انجام خواهیم داد و مشخص خواهد شد که درست هم هست!) برای یک سیستم با Q نسبتاً بالا فرض می کنیم که معادله زیر باید تقریباً درست باشد:

$$dE/dt = -\omega E/Q. \quad (8.24)$$

این تقریب چندان مناسب نیست زیرا تنها برای Q های بزرگ صحیح است. در هر رادیان، سیستم، کسر $1/Q$ از انرژی ذخیره شده E را از دست می دهد. از این رو در یک بازه زمانی داده شده dt انرژی به مقدار $\omega dt/Q$ تغییر خواهد کرد زیرا تعداد رادیان های متناسب با dt برابر ωdt است. بسامد چقدر است؟ فرض کنیم که سیستم به آرامی در حال حرکت است و نیروهای خیلی کمی به آن اعمال می شود که اگر اجازه دهیم سیستم به خودی خود با بسامد یکسانی نوسان خواهد کرد. بنابراین حدس ما این است که ω بسامد تشدید ω است. در نتیجه از معادله (۸.۲۴) استنتاج خواهیم کرد که انرژی ذخیره شده به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

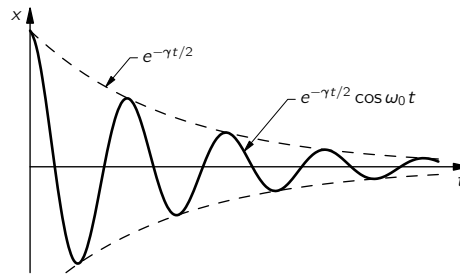
$$E = E_0 e^{-\omega_0 t/Q} = E_0 e^{-\gamma t}. \quad (9.24)$$

این معیاری از مقدار انرژی در هر لحظه خواهد بود. فرمول دامنه نوسان برحسب تابعی از زمان به طور تقریبی چگونه خواهد بود؟ یکسان است؟ نه! مقدار انرژی در یک فنر متناسب با مربع جابه جایی است، انرژی جنبشی متناسب با مربع سرعت است، در نتیجه، انرژی کل متناسب با مربع جابه جایی است. از این رو جابه جایی، یا دامنه نوسان، به خاطر توان دوم، به نصف کاهش پیدا خواهد کرد. به عبارت دیگر ما حدس می زنیم که پاسخ حرکت گذرای میرا، نوسانی با بسامد نزدیک به بسامد تشدید ω خواهد بود، که در آن دامنه حرکت موج سینوسی به صورت $e^{-\gamma t/2}$ کاهش پیدا خواهد کرد:

$$x = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos \omega_0 t. \quad (10.24)$$

این معادله و شکل ۱۰.۲۴ به ما ایده اینکه انتظار چه چیزی را باید داشت، خواهند داد. حال حرکت را به صورت دقیق با حل معادله دیفرانسیل حرکت، تحلیل کنیم.

بنابراین با معادله (۱۰.۲۴) شروع می کنیم، بدون نیروی خارجی، چطور آن را حل کنیم؟ (به عنوان یک فیزیکدان ما نباید به اندازه ای که نگران چستی پاسخ هستیم، نگران روش حل باشیم.) با توجه به تجربیات قبلی بیایید یک منحنی نمایی را به عنوان پاسخ امتحان کنیم، $x = Ae^{i\omega t}$. (چرا این را امتحان می کنیم؟ چون این ساده ترین چیزی است که می توان از آن مشتق گیری کرد!) ما این را در معادله (۱۰.۲۴) قرار می دهیم



شکل ۱۰۲۴: یک نوسان میرای کسینوسی.

(با $F(t) = 0$)، با استفاده از این قانون که در هر بار مشتق‌گیری x نسبت به زمان، $i\alpha$ را در آن ضرب می‌کنیم. بنابراین جایگذاری آن واقعاً ساده است. در نتیجه، معادله ما به صورت زیر خواهد بود:

$$(-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2)Ae^{i\alpha t} = 0. \quad (11.24)$$

پاسخ نهایی باید برای تمام زمان‌ها صفر باشد، که غیرممکن است مگر (الف) $A = 0$ ، که پاسخی بدیهی است و A باقی خواهد ماند، یا (ب):

$$-\alpha^2 + i\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0. \quad (12.24)$$

که اگر بتوانیم این را بر حسب α حل کنیم، پاسخی خواهیم داشت که نیازی نیست در آن A صفر باشد!

$$\alpha = i\gamma/2 \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}. \quad (13.24)$$

تا اینجا فرض می‌کنیم که γ نسبت به ω_0 نسبتاً کوچک است، در نتیجه، عبارت $\omega_0^2 - \gamma^2/4$ قطعاً مثبت خواهد بود، و مشکلی با گرفتن ریشه دوم نداریم. تنها چیز آزاردهنده این است که ما دو پاسخ به دست می‌آوریم! بنابراین

$$\alpha_1 = i\gamma/2 + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = i\gamma/2 + \omega_\gamma \quad (14.24)$$

و

$$\alpha_2 = i\gamma/2 - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = i\gamma/2 - \omega_\gamma. \quad (15.24)$$

اجازه دهید اولی را در نظر بگیریم، با فرض اینکه ما توجه نکرده بودیم که ریشه دوم، دو پاسخ ممکن دارد. در نتیجه ما می‌دانیم که یک پاسخ برای x ، $x_1 = Ae^{i\alpha_1 t}$ است، که در آن A یک ثابت است. حال در جایگذاری α_1 به این خاطر که قرار است دفعات زیادی ظاهر شود و نوشتن آن زمان زیادی می‌برد ما از معادله استفاده می‌کنیم، یعنی، $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4} = \omega_\gamma$. بنابراین $i\alpha_1 = -\gamma/2 + i\omega_\gamma$ و خواهیم داشت، $x_1 = Ae^{(-\gamma/2 + i\omega_\gamma)t}$ یا به طور مشابه، به خاطر خصوصیات جالب تابع نمایی داریم:

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} e^{i\omega_\gamma t}. \quad (16.24)$$

فصل ۲۴. گذراها

اول اینکه متوجه نوسانی بودن آن می‌شویم، یک نوسان با بسامد ω_γ که دقیقاً همان بسامد ω نیست اما اگر سیستم خوبی باشد نزدیک ω است. دوم، دامنه نوسان به صورت نمایی کاهش می‌یابد! اگر به طور مثال ما قسمت حقیقی (۱۶.۲۴) را به دست آوریم، خواهیم داشت:

$$x_1 = Ae^{-\gamma t/2} \cos \omega_\gamma t. \quad (17.24)$$

این خیلی شبیه پاسخی است که در (۱۰.۲۴) حدس زدیم، به جز اینکه بسامد واقعاً ω_γ است. این تنها خطا است، بنابراین این چیز یکسانی است و ما ایده درستی داریم. اما همه چیز درست نیست! چیزی که درست نیست این است که پاسخ دیگری نیز وجود دارد. پاسخ دوم x_2 است و ما می‌بینیم که تفاوت تنها در علامت ω_γ است که منفی شده است:

$$x_2 = Be^{-\gamma t/2} e^{-i\omega_\gamma t}. \quad (18.24)$$

این به چه معناست؟ ما اثبات خواهیم کرد که اگر x_1 و x_2 هر کدام پاسخ معادله (۱۰.۲۴) با $F = 0$ باشند، آنگاه $x_1 + x_2$ نیز پاسخ معادله خواهد بود! بنابراین پاسخ کلی x به فرم ریاضی زیر است:

$$x = e^{-\gamma t/2} (Ae^{i\omega_\gamma t} + Be^{-i\omega_\gamma t}). \quad (19.24)$$

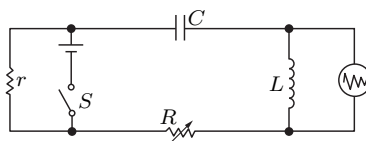
حال شاید تعجب کنیم که با وجود اینکه همان پاسخ اول برایمان کافی بود چرا باید زحمت این پاسخ دیگر را نیز به خود بدهیم! این پاسخ اضافی دیگر برای چیست؟ زیرا ما می‌دانیم که تنها باید بخش حقیقی را محاسبه کنیم. ما می‌دانیم که باید بخش حقیقی را در نظر بگیریم، اما ریاضیات چطور می‌داند که ما تنها بخش حقیقی را می‌خواهیم؟ وقتی که نیروی محرک غیرصفر $F(t)$ را داشتیم، ما یک نیروی مصنوعی را به آن اضافه کردیم و قسمت موهومی معادله به مسیر مشخصی هدایت می‌شد. اما وقتی قرار می‌دهیم، $F(t) \equiv 0$ توافق ما مبنی بر اینکه x تنها باید بخش حقیقی هر چیزی که ما می‌نویسیم باشد، تنها دانش خود ماست و معادلات ریاضی هنوز این را نمی‌دانند. دنیای فیزیکی دارای پاسخ حقیقی است اما پاسخی که ما با آن خیلی خوشحال بودیم حقیقی نیست، مختلط است. معادله نمی‌داند که ما می‌خواهیم به طور دلخواه قسمت حقیقی را انتخاب کنیم، بنابراین باید پاسخ‌هایی به شکل مزدوج مختلط یکدیگر به ما نشان دهد که با کنار هم قرار دادن آن‌ها ما می‌توانیم یک پاسخ واقعاً حقیقی به دست آوریم. این چیزی است که x_2 برای ما انجام می‌دهد. برای اینکه x حقیقی باشد، $Be^{-\omega_\gamma t}$ باید مزدوج مختلط $Ae^{i\omega_\gamma t}$ باشد که بخش‌های موهومی از بین بروند. در نتیجه مشخص می‌شود که B مزدوج مختلط A است و پاسخ حقیقی ما برابر است با:

$$x = e^{-\gamma t/2} (Ae^{i\omega_\gamma t} + A^* e^{-i\omega_\gamma t}). \quad (20.24)$$

بنابراین پاسخ حقیقی ما یک نوسان میرا با اختلاف فاز است، و این همان چیزی است که از قبل گفته شده بود.

۳.۲۴ گذراهای الکتریکی

حال ببینیم آیا معادلات بالا واقعاً کار می‌کنند. ما مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲.۲۴ را رسم می‌کنیم، که در آن، به یک نوسان‌نما ولتاژ دو سر سلف L را پس از ایجاد ولتاژ به وسیله بستن کلید S اعمال



شکل ۳.۲۴: یک مدار الکتریکی برای نمایش گذراها

می‌کنیم. این یک مدار نوسانی است و به نوعی پاسخ گذرا ایجاد می‌کند، و مشابه حالتی است که در آن ما ناگهان یک نیرو اعمال کنیم و سیستم شروع به نوسان کند. این نظیر (آنالوگ) الکتریکی یک نوسانگر میرای مکانیکی است و ما نوسان را در یک نوسان‌نما تماشا می‌کنیم، جایی که ما باید منحنی‌هایی را که سعی در تحلیل آنها داشتیم، ببینیم. (حرکت افقی نوسان‌نما در یک سرعت یکنواخت صورت می‌گیرد درحالی‌که حرکت قائم ولتاژ در دوسر القاگر است. باقی مدار تنها جزئیات فنی است. ما علاقه‌مندیم که آزمایش را بارها و بارها تکرار کنیم، زیرا استمرار مشاهده برای دیدن تنها یک اثر یکسان بر روی صفحه، کافی نیست. بنابراین ما آزمایش را دوباره و دوباره به وسیله بستن ۶۰ بار در ثانیه کلید انجام می‌دهیم. هر بار که کلید را می‌بندیم همزمان جاروب کردن افقی نوسان را نیز راه می‌اندازیم و نوسان‌نما نمودار را بارها و بارها رسم می‌کند.) در شکل‌های ۳.۲۴ تا ۶.۲۴ ما مثال‌هایی از نوسان‌نما را مشاهده می‌کنیم که در حقیقت بر روی صفحه نوسان‌نما ترسیم شده‌اند. شکل ۳.۲۴ یک نوسان‌نما را در یک مدار با Q و یک γ نشان می‌دهد. این نمودار خیلی سریع از بین نمی‌رود بلکه در مسیر رو به پایین خود دفعات زیادی نوسان می‌کند. اما ببینیم چه اتفاقی می‌افتد؛ وقتی Q را کاهش می‌دهیم، نوسان خیلی سریع‌تر از بین می‌رود. ما می‌توانیم Q را با افزایش مقاومت R در مدار کاهش دهیم. وقتی که مقاومت در مدار را افزایش می‌دهیم، میرایی نمودار منحنی سریع‌تر می‌شود (شکل ۴.۲۴). سپس اگر ما باز هم مقاومت در مدار را بیش‌تر کنیم، باز هم این میرایی سریع‌تر می‌شود (شکل ۵.۲۴). اما وقتی بیش‌تر از یک مقدار مشخصی مقاومت را افزایش می‌دهیم، نمی‌توانیم هیچ نوسانی مشاهده کنیم! سؤال این است که، آیا به خاطر این است که چشمان ما به اندازه کافی قوی نیست؟ اگر ما مقاومت را باز هم بیش‌تر کنیم، یک منحنی شبیه به شکل ۶.۲۴ به دست می‌آوریم، که به نظر نمی‌رسد هیچ نوسانی داشته باشد به‌جز شاید یکی. حال چگونه می‌توانیم این را با ریاضیات توضیح دهیم؟

البته مقاومت در دستگاه مکانیکی متناسب با عبارت γ است. به طور مشخص γ برابر R/L است. حال اگر γ را در پاسخ‌های (۱۴.۲۴) و (۱۵.۲۴) که قبلاً به آنها بسنده کرده بودیم، افزایش دهیم، وقتی $\gamma/2$ از ω بیش‌تر شود آشفستگی شروع می‌شود. ما باید پاسخ‌ها را به طور دیگری بازنویسی کنیم، مانند:

$$i\gamma/2 + i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2} \quad \text{و} \quad i\gamma/2 - i\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}.$$

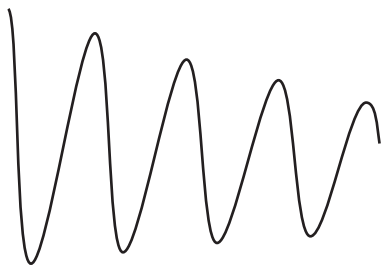
حال اینها دو جواب ما هستند و با استفاده از استدلال ریاضی، مانند قبل دوباره دو پاسخ به دست می‌آوریم، $e^{i\alpha_1 t}$ و $e^{i\alpha_2 t}$. حال اگر α_1 را جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$x = Ae^{-(\gamma/2 + \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t},$$

یک زوال نمایی زیبا و بدون نوسان. به همین شکل برای پاسخ دوم هم داریم:

$$x = Be^{-(\gamma/2 - \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2})t}.$$

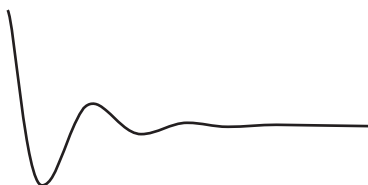
فصل ۲۴. گذرها



شکل ۳.۲۴



شکل ۴.۲۴



شکل ۵.۲۴



شکل ۶.۲۴

به یاد داشته باشید که ریشه دوم نمی‌تواند از $\gamma/2$ بیش‌تر شود، زیرا حتی اگر $\omega_0 = 0$ ، یک عبارت برابر دیگری می‌شود. اما ω_0^2 از $\gamma^2/4$ کسر می‌شود، در نتیجه ریشه دوم کمتر از $\gamma/2$ است و به همین دلیل عبارت داخل پرانتز همیشه یک عدد مثبت است. خدا را شکر! چرا؟ چون اگر منفی بود ما e را به توان یک عدد مثبت ضرب در t به دست می‌آوردیم که بدین معنی بود که در حال انفجار است! اما کاملاً برعکس، با قرار دادن هرچه بیش‌تر مقاومت در مدار، ما می‌دانیم که انفجاری نخواهیم داشت. بنابراین حالا ما دو پاسخ داریم، که هر کدام خود یک نزول نمایی دارند، اما یکی از آن‌ها آهنگ نزول خیلی سریع‌تری نسبت به دیگری دارد. البته پاسخ کلی یک ترکیب از هر دو آن‌ها است. ضرایب ترکیب بستگی به این دارند که حرکت چطور شروع می‌شود یا به عبارتی شرایط اولیه مسئله چه چیزهایی هستند. به طور خاص این مدار طوری شروع به حرکت می‌کند که A منفی و B مثبت است، بنابراین ما اختلاف دو منحنی نمایی را مشاهده می‌کنیم. حال بیاید توضیح دهیم که ما می‌توانیم با دانستن چگونگی شروع حرکت، دو ضریب A و B (یا A^*) را پیدا کنیم.

فرض کنید که در $t = 0$ ما می‌دانیم که $x = x_0$ و $dx/dt = v_0$. اگر ما در عبارت قرار دهیم $t = 0$ ،

$$x = e^{-\gamma t/2}(Ae^{i\omega_\gamma t} + A^*e^{-i\omega_\gamma t}),$$

$$dx/dt = e^{-\gamma t/2}[(-\gamma/2 + i\omega_\gamma)Ae^{i\omega_\gamma t} + (-\gamma/2 - i\omega_\gamma)A^*e^{-i\omega_\gamma t}],$$

از آنجا که $e^0 = e^{i0} = 1$ ، خواهیم داشت:

$$x_0 = A + A^* = 2A_R,$$

$$v_0 = -(\gamma/2)(A + A^*) + i\omega_\gamma(A - A^*)$$

$$= -\gamma x_0/2 + i\omega_\gamma(2iA_I),$$

که در آن $A = A_R + iA_I$ و $A^* = A_R - iA_I$. از این‌رو خواهیم داشت:

$$A_R = x_0/2$$

و

$$A_I = -(v_0 + \gamma x_0/2)/2\omega_\gamma. \quad (21.24)$$

این ضرایب، A و A^* را کاملاً مشخص می‌کند و نیز منحنی کامل پاسخ گذرا را برحسب اینکه حرکت چطور شروع می‌شود، نشان می‌دهد. برحسب اتفاق ما می‌توانیم پاسخ‌ها را به شکل دیگری نیز بنویسیم، اگر دقت کنیم:

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \quad \text{و} \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta.$$

در نتیجه ما می‌توانیم پاسخ کامل را به شکل زیر بنویسیم:

$$x = e^{-\gamma t/2} \left[x_0 \cos \omega_\gamma t + \frac{v_0 + \gamma x_0/2}{\omega_\gamma} \sin \omega_\gamma t \right], \quad (22.24)$$

فصل ۲۴. گذرها

که در آن، $\omega_\gamma = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. این بیان ریاضی چگونگی میرایی یک نوسان است. ما شاید به طور مستقیم از آن استفاده نکنیم اما نکاتی در آن وجود دارد که ما بر درستی آن‌ها در حالت‌های کلی‌تر تاکید داریم.

اول اینکه رفتار چنین سیستمی بدون نیروی خارجی به صورت یک جمع، یا برهم‌نهی از عبارت‌های خالص نمایی برحسب زمان توصیف شده است (که ما آن را به صورت $e^{i\alpha t}$ نوشتیم). این راه‌حل خوبی برای آزمودن در چنین شرایطی است. مقادیر α در حالت کلی ممکن است مختلط باشد که قسمت موهومی آن نشانگر میرایی است. نهایتاً ارتباط ریاضی بنیادی بین توابع سینوسی و نمایی که در فصل ۲۲ بررسی شد، به لحاظ فیزیکی، وقتی یک پارامتر فیزیکی از یک مقدار بحرانی عبور می‌کند، معمولاً به صورت تغییر رفتار از نوسانی به نمایی ظاهر می‌گردد.