

## شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 22

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۲۲

مترجم: محمدرضا نصیرزاده

ویراستار و حروفچین: زهره رشنودی، علی باقری کوچکسرائی

نسخه‌ی ۱.۱ بهار ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

[www.Zharfa90.ir](http://www.Zharfa90.ir)

این صفحه مخصوصاً خالی گذاشته شده است.

## فصل ۲۲

### جبر

#### ۱۰۲۲ جمع و ضرب

در مطالعه سیستم‌های نوسانی ما فرصت این را داریم تا یکی از مهم‌ترین و هم‌چنین حیرت‌انگیزترین فرمول‌ها در تمام ریاضیات را به کار ببریم. از نگاه فیزیکدانان، ما می‌توانیم این فرمول را در دو دقیقه یا کمی بیشتر مطرح کنیم، مسئله‌مان حل شود و تمام. اما علم همان اندازه که کارکرد عملی دارد، یک پیشه ذهنی لذت‌بخش نیز هست، پس به جای اینکه تنها چند دقیقه را صرف بررسی این گوهر کنیم باید این نگین ارزشمند را با توجه به جایگاهش در طرح سترگ آن شاخه از ریاضیات جست‌وجو کنیم، که جبر پایه نامیده می‌شود.

حال ممکن است بپرسید: «ریاضیات در یک سخنرانی مربوط به فیزیک چه می‌کند؟» خُب، ما چندین دلیل برای آن داریم: نخست اینکه ریاضیات یک ابزار مهم در فیزیک است، اما این تنها می‌تواند توجیهی باشد برای اینکه دو دقیقه به آن بپردازیم و نه بیشتر. از سویی در فیزیک نظری فهمیدیم که همه قوانین را می‌توان به شکل ریاضی نوشت و این همان زیبایی و سادگی فیزیک است. با این اوصاف، به نظر می‌رسد، برای فهمیدن طبیعت تنها درک عمیق‌تری از روابط ریاضی کافی باشد. اما راستش را بخواهید دلیل اصلی این است که ریاضیات لذت‌بخش است و چنین حساب و کتاب‌ها و دلیل آوردن‌هایی خالی از حقیقت است. ما انسان‌ها طبیعت را با روش‌های مختلفی مشاهده می‌کنیم و دوره‌های گوناگونی را هم در دانشکده‌های مختلف برگزار می‌کنیم، ولی سرآخر باید دنبال لذت‌های ذهنی خودمان راه بیفتیم.

اینکه الآن باید با دقت بیش‌تری جبر را مطالعه کنیم دلیل دیگری هم می‌تواند داشته باشد و آن این است که هرچند، اکثر ما در دبیرستان آن را گذرانده‌ایم؛ اما آن موقع اولین باری بود که با جبر روبه‌رو می‌شدیم؛ همه معادلات برای ما ناآشنا بود، و فهمیدن آن‌ها هم کار سختی بود، درست مثل حال و روز الانمان در برخورد با فیزیک. به هر حال نگاه به گذشته و مشاهده مسیرهای طی شده و کلیت و نقشه همه آنچه فراگرفته شده است، می‌تواند لذت‌بخش باشد و این کار خالی از لطف نیست. شاید روزی یکی از استادان دانشکده ریاضیات هم سخنرانی خود را مثلاً در مورد مکانیک به همین روش ارائه دهد تا آن چیزی را نشان دهد که ما در پی یافتنش در دوره‌های فیزیک بودیم!

در اینجا موضوع جبر از دیدگاه ریاضیدانان واکاوی نخواهد شد، صراحتاً به این دلیل که ریاضیدانان بیش‌تر به چگونگی نمایش حقایق مختلف ریاضی تمایل دارند و اینکه دقیقاً چه تعداد فرض نیاز است و چه چیزی مورد نیاز نیست. آن‌ها زیاد در قید نتیجه چیزی که اثبات می‌کنند، نیستند. مثلاً ممکن است قضیه

فیثاغورس برایمان شگفت‌انگیز به نظر برسد، اینکه جمع مربع دو ضلع مثلث قائم الزامیه برابر با مربع وتر آن است؛ حقیقت خیلی جالبی است، موضوع ساده و در عین حال عجیبی که ممکن است فارغ از بحث در مورد اینکه چگونه آن را اثبات کنیم و اصل‌های مورد نیاز اثباتش چیست، به آنپردازیم. بنابراین اگر بخواهیم با چنین نگرشی پیش برویم، باید سیستم جبر پایه را به صورت کیفی توضیح دهیم. در اینجا ما صفت پایه‌ای را برای جبر به کار بردیم چون اکنون شاخه‌ای از ریاضیات به نام جبر مدرن وجود دارد که در آن بعضی قوانین مثل  $ab = ba$  دیگر درست نیست، ولی با این حال جبر نامیده می‌شود، که البته در اینجا بحثی از آن نخواهیم کرد.

برای شروع، ما از میانه راه پیش می‌رویم. فرض می‌کنیم که می‌دانیم اعداد صحیح چه هستند، صفر چیست، و افزایش یک واحد یک عدد به چه معناست. البته شاید شما بگویید این که دیگر میانه راه نیست. اما از دیدگاه ریاضی این میانه راه است، چرا که ما می‌توانیم حتی به قبل‌تر از این هم برگردیم و با استفاده از نظریه مجموعه‌ها به چگونگی اشتقاق برخی از این ویژگی‌های اعداد صحیح پردازیم. اما این جهت کار فلسفه ریاضی و منطق ریاضی است و ما از جهت دیگری با فرض اینکه هم می‌دانیم اعداد صحیح چه هستند و هم می‌دانیم چگونه محاسبه جبری انجام دهیم، به مسئله می‌پردازیم.

اگر ما با عدد مشخصی مثل  $a$  که یک عدد صحیح است، کارمان را شروع کنیم، و  $b$  بار یک واحد را به صورت متوالی به آن اضافه کنیم، به عددی می‌رسیم که آن را  $a + b$  می‌نامیم، و این تعریف جمع اعداد صحیح است.

حالا که جمع را تعریف کرده‌ایم، می‌توانیم این مطلب را نیز بیان کنیم: اگر از هیچ شروع کنیم و  $a$  را  $b$  بار به طور متوالی به آن اضافه کنیم حاصل آن را ضرب اعداد صحیح می‌نامیم و آن را  $a \cdot b$  می‌نامیم.

همچنین ما اکنون می‌توانیم توالی ضرب را نیز تعریف کنیم: اگر با ۱ شروع کنیم و  $b$  بار آن را در  $a$  به صورت متوالی ضرب کنیم، آن را به توان رسیدن می‌نامیم و می‌نویسیم:  $a^b$ .

حالا پیامد تعریف‌های داده شده، این روابطی است که می‌توانیم درستی آن‌ها را به راحتی نشان دهیم:

|                           |                                 |
|---------------------------|---------------------------------|
| (الف) $a + b = b + a$     | (ب) $a + (b + c) = (a + b) + c$ |
| (ج) $ab = ba$             | (د) $a(b + c) = ab + ac$        |
| (ه) $(ab)c = a(bc)$       | (و) $(ab)^c = a^c b^c$          |
| (ز) $a^b a^c = a^{(b+c)}$ | (ح) $(a^b)^c = a^{(bc)}$        |
| (ط) $a + 0 = a$           | (ی) $a \cdot 1 = a$             |
| (ک) $a^1 = a$             |                                 |

(۱.۲۲)

این نتایج را به خوبی می‌شناسیم و نیازی نیست که خیلی مته به خشخاش بگذاریم و در این روابط ریز شویم، تنها فهرست کردن آن‌ها کافی است. هم‌چنین، ۱ و ۰ ویژگی‌های منحصر به خود را دارند از جمله اینکه:  $a + 0$  برابر با  $a$  است،  $a$  ضربدر یک برابر  $a$  می‌شود و اینکه  $a$  به توان یک همان  $a$  است. هم‌چنین در این بحث باید چندین مشخصه نظیر پیوستگی و ترتیب را هم در نظر بگیریم، که تعریف کردن آن‌ها کار بسیار سختی است؛ و ما انجام این کار را به تئوری‌های دقیق می‌سپاریم. به علاوه، این نکته هم کاملاً درست است که ما قواعد زیادی را نوشته‌ایم؛ که برخی از آن‌ها از برخی از همین قواعد استنتاج می‌شوند، اما الآن نباید نگران چنین مسائلی باشیم.

## ۲.۲۲ عملگرهای وارون

علاوه بر عملگرهای مستقیم جمع، ضرب و توان، عملگرهایی به نام وارون نیز وجود دارند که در ادامه، تعریف آن‌ها ارائه می‌شود. بگذارید فرض کنیم  $a$  و  $c$  داده شده‌اند و ما می‌خواهیم مقادیری برای  $b$  بیابیم که معادلاتی شبیه به معادلات پیش رو را برآورده کنند:  $a + b = c$ ،  $ab = c$ ،  $a^b = c$ . اگر  $a + b = c$  شود،  $b$  به صورت  $c - a$  تعریف می‌شود، که آن را تفریق می‌نامیم. به این ترتیب عمل تقسیم نیز آشکار است: اگر  $ab = c$ ، آنگاه  $b = c/a$  تعریف تقسیم است، (یعنی همان وارونه راه حل معادله  $ab = c$ ). حال اگر ما داشته باشیم  $b^a = c$  و از خود بپرسیم  $b$  چیست؟ باید بگوییم  $a$ مین ریشه  $c$ :  $b = \sqrt[a]{c}$ . مثلاً اگر ما بپرسیم کدام عدد صحیح به توان ۳ برابر ۸ می‌شود؟ جواب ریشه سوم ۸ است. که یعنی ۲. از آنجایی که  $b^a$  و  $a^b$  برابر نیستند، ما با یک مسئله دیگر برای وارون توان مواجهیم و آن این است که «با چه توانی ما باید ۲ را به ۸ افزایش دهیم؟» که به این کار، لگاریتم گرفتن می‌گویند. اگر  $a^b = c$ ، می‌نویسیم  $b = \log_a c$  این حقیقت که این نمادگذاری پیچیده‌تر از دیگر روابط است، به هیچ وجه به معنای بنیادی نبودن آن در مقایسه با دیگر فرایندها نیست؛ حداقل در مورد اعداد صحیح. اگرچه لگاریتم‌ها دیرتر در کلاس‌های جبر طرح می‌شوند، اما، در عمل به همان سادگی ریشه‌گرفتن هستند؛ و تنها، نوع متفاوتی از روش حل یک معادله جبری هستند. عملگرهای مستقیم و وارون به صورت خلاصه در پایین آمده‌اند:

|                   |             |
|-------------------|-------------|
| تفریق (الف.۲)     | جمع (الف.۱) |
| $b = c - a$       | $a + b = c$ |
| تقسیم (ب.۲)       | ضرب (ب.۱)   |
| $b = c/a$         | $ab = c$    |
| ریشه (ج.۲)        | توان (ج.۱)  |
| $b = \sqrt[a]{c}$ | $b^a = c$   |
| لگاریتم (د.۲)     | توان (د.۱)  |
| $b = \log_a c$    | $a^b = c$   |

حالا مسئله این است که این روابط یا قوانین تا آنجا برای اعداد صحیح درست هستند که از تعاریف جمع و ضرب و توان پیروی کنند؛ ما می‌خواهیم این پرسش را مطرح کنیم که آیا می‌توان درحالی‌که فرایندهای  $a + b$  و... با عمل مستقیم اضافه کردن ۱، یا مثلاً عمل مستقیم ضرب متوالی اعداد صحیح، غیرقابل تعریف هستند؛ رده‌هایی که  $a$ ،  $b$  و  $c$  نمایانگر آن‌ها هستند را گسترش داد و هم‌چنان این قواعدی که در بالا ذکر شده، صادق باقی بمانند.

## ۳.۲۲ انتزاع و تعمیم

زمانی که ما سعی می‌کنیم یک معادله جبری ساده شامل همه این تعاریف را حل کنیم، خیلی زود با مسائل غیرقابل حلی مواجه می‌شویم؛ مثلاً فرض کنید که می‌خواهیم معادله  $5 - 3 = b$  را حل کنیم، به این معنا که

## فصل ۲۲. جبر

طبق تعریف ارائه شده از تفریق، باید به دنبال عددی باشیم که وقتی به ۵ اضافه می‌شود، بدهد ۳، و البته که چنین عددی وجود ندارد؛ به این علت که ما فقط اعداد صحیح مثبت را در نظر گرفتیم؛ و به این ترتیب این معادله به یک معادله غیر قابل حل تبدیل می‌شود. با این حال، نقشه و ایده درست این است: انتزاع و تعمیم. ما از ساختار کلی جبر، قوانین و اعداد صحیح؛ تعاریف اصلی جمع و ضرب را انتزاع نمودیم، اما قوانین (۱.۲۲) و (۲.۲۲) را رها کرده، و فرض می‌کنیم که این روابط در کل برای رده گسترده‌تری از اعداد صادق باشند، درحالی‌که آن‌ها را بر مبنای رده بسیار کوچک‌تری از اعداد استنتاج کرده‌ایم. بنابراین به جای استفاده نمادین از اعداد صحیح برای تعریف قوانین، ما از قوانین برای تعریف نمادها استفاده می‌کنیم که نتیجه آن نوع عمومی‌تری از اعداد را به نمایش می‌گذارد. به عنوان مثال، با کارکردن تنها روی قوانین می‌توانیم نشان دهیم که  $2 - 5 = 0 - 3$ . در حقیقت ما می‌توانیم نشان دهیم که با تعریف مجموعه جدیدی از اعداد بنام مجموعه اعداد صحیح منفی،  $1 - 0$  و  $2 - 0$  و  $3 - 0$  و  $4 - 0$  و... می‌توان عمل تفریق را انجام داد، سپس ما می‌توانیم از تمام قوانین دیگر مثل  $a(b + c) = ab + ac$  و... برای پیدا کردن قوانین مربوط به ضرب اعداد منفی استفاده کنیم. به این ترتیب، درخواست یافت که در حقیقت، همه قوانین همانگونه که برای اعداد مثبت تعریف می‌شوند برای اعداد منفی هم قابل تعریف هستند.

بنابراین ما دامنه اشیاء را افزایش داده‌ایم درحالی‌که هم‌چنان قوانین در مورد آن‌ها برقرار است، اما معنای نمادها متفاوت شده است.

برای مثال نمی‌شود گفت که ۲- در ۵ واقعاً یعنی ۲- بار اضافه کردن ۵ به صورت پیاپی. این اصلاً معنی نمی‌دهد. اما با این اوصاف همه چیز طبق قوانین به درستی کار خواهد کرد.

یک مسئله جالب که با گرفتن توان به وجود می‌آید، این است که فرض کنید ما می‌خواهیم بفهمیم  $a^{(3-5)}$  چه معنی می‌دهد؟ ما تنها می‌دانیم که  $3 - 5$  جواب معادله  $5 + (3 - 5) = 3$  است، و به این ترتیب می‌دانیم  $a^{(3-5)} = a^3$ ، در نتیجه با توجه به تعریف تقسیم داریم:  $a^{(3-5)} = a^3 / a^5$ . با کمی کار بیشتر این جمله را می‌توان به  $1/a^2$  کاهش داد. در نتیجه پی می‌بریم که توان‌های منفی، وارون توان‌های مثبت هستند، اما  $1/a^2$  یک نماد بی‌معنی است؛ چون، اگر  $a$  یک عدد صحیح مثبت یا منفی باشد مربع آن بزرگ‌تر از ۱ است، و ما هنوز هم نمی‌دانیم منظور ما از تقسیم ۱ بر عددی بزرگ‌تر از ۱ چیست!

در ادامه مسیر؛ راه اصلی، ادامه روند تعمیم است و هرگاه با مسئله غیرقابل حل دیگری روبه‌رو شویم، دامنه اعدادمان را گسترش می‌دهیم. حالا به عمل تقسیم می‌پردازیم؛ با توجه به تعریف تقسیم، ما نمی‌توانیم عددی صحیح حتی اگر منفی باشد را پیدا کنیم که برابر حاصل تقسیم  $3/5$  باشد. ولی اگر فرض کنیم اعداد اعشاری هم قوانین را برآورده می‌کنند، می‌توانیم در مورد جمع و ضرب اعداد اعشاری هم صحبت کنیم و همه چیز مثل قبل به خوبی کار خواهد کرد.

یک مثال دیگر از توان:  $a^{3/5}$  به چه معنا است؟ ما فقط می‌دانیم  $5 = (3/5) \cdot 5$ ، حالا که تعریف  $3/5$  را می‌دانیم. بنابراین می‌دانیم که  $a^{(3/5) \cdot 5} = (a^{3/5})^5 = a^3$ ، و این یکی از قوانین است و در ادامه، با توجه به تعریف ریشه‌ها داریم:  $a^{(3/5)} = \sqrt[5]{a^3}$ .

با این روش ما می‌توانیم بفهمیم که چرا اعداد اعشاری را با نمادهای گوناگونی نشان می‌دهیم. ما مشخص کردن تعاریف را نه دلبخواهی بلکه با استفاده از خود قوانین انجام می‌دهیم، و این یک حقیقت معنی‌دار است که همه قوانین همانجور که برای اعداد صحیح مثبت و منفی به کار می‌روند برای اعداد اعشاری نیز به کار می‌روند!

هم‌چنان فرایند تعمیم را ادامه می‌دهیم. آیا معادله دیگری وجود دارد که نتوانیم حل کنیم؟ بله، وجود دارد. برای مثال، غیرممکن است که معادله  $b = 2^{1/2} = \sqrt{2}$  را حل کرد. یعنی غیرممکن است عددی را

پیدا کرد که حقیقی (اعشاری) باشد و مربع آن برابر ۲ باشد. در این زمانه برای ما بسیار آسان است تا به این سوال پاسخ دهیم، چرا که با سیستم اعشاری (دستگاه دهمی) آشنایی داریم و خُب درک یک اعشاری بی پایان به عنوان یک تقریب از ریشه دوم ۲ کار مشکلی نیست، اما در گذشته، این ایده، دشواری های بسیاری را برای یونانیان ایجاد کرد. اینکه در اینجا دقت به چه معناست نیازمند مفهومی از پیوستگی و ترتیب است، و این در واقع دشوارترین گام در فرایند تعمیم است، که پیش از این، ددکیند آن را با دقت صورت بخشیده است. گرچه بدون در نظر گرفتن ظرافت و دشواری ریاضیاتی آن، تقریباً فهمیدن چیزی که در اینجا از دقت منظور ماست، آسان است؛ ما به دنبال توالی کامل اعشاری های تقریبی، اعشاری های کامل (چرا که هر عدد اعشاری در هر جا که متوقف شود یک عدد حقیقی است) هستیم، این اعداد هر چه پیش تر می روند به جواب مورد انتظار نزدیک و نزدیک تر می شوند. همین اندازه برای بحث ما کفایت می کند و به ما اجازه می دهد که خود را با اعداد غیر حقیقی درگیر کنیم و چیزهایی مثل ریشه دوم ۲ را با هر دقت مورد انتظار به دست آوریم.

## ۴.۲۲ تقریب اعداد غیر حقیقی

مسئله بعدی این است که در مورد توان های غیر حقیقی چه اتفاقی می افتد. فرض کنید مثلاً می خواهیم  $۱۰^{\sqrt{2}}$  را تعریف کنیم. در واقع جواب بسیار ساده است. اگر ما ریشه دوم ۲ را به یک عدد معین از اعداد اعشاری تقریب بزنیم، در نتیجه توان حقیقی خواهد بود و ما می توانیم با استفاده از روش بالا از ریشه تقریب بگیریم و یک تقریب از  $۱۰^{\sqrt{2}}$  به دست آوریم. در ادامه ممکن است بخواهیم به توالی اعشاری بیفزاییم (که باز هم یک عدد حقیقی است) و یک ریشه مناسب بگیریم، این بار ریشه بسیار بزرگ تر (دقیق تر) می شود چون یک مخرج بزرگ تر در اعشار وجود دارد و تقریب بهتری به دست می آید. و البته که ما می خواهیم ریشه های بزرگ (دقیق) را به دست آوریم و این کار سختی است. چگونه می توانیم از پس این مشکل برباییم؟ در محاسبه ریشه دوم، ریشه سوم و دیگر ریشه های کوچک، یک فرایند محاسباتی وجود دارد که با آن می توانیم یک جایگاه اعشاری را بعد از دیگری به دست آوریم. اما حجم کار مورد نیاز برای محاسبه توان های غیر حقیقی و لگاریتم ها که وارون آن ها هستند به اندازه ای زیاد است که از هیچ محاسبه ساده ای نمی توانیم استفاده کنیم. به همین دلیل جدول ها ابداع شدند که به ما اجازه می دهند چنین توان هایی را محاسبه کنیم و این جدول ها، بر حسب چیدمان، جداول لگاریتمی یا جداول توانی نامیده می شوند. مسئله اصلی صرفه جویی در زمان است، اگر می خواهیم عددی را به توان عددی غیر حقیقی برسانیم می توانیم به جای حساب کردن، فقط آن را در جدول جست و جو کنیم. البته که چنین محاسبه ای تنها یک مسئله تکنیکی (روش حل مسئله) است، اما بسیار جالب است و از ارزش تاریخی زیادی برخوردار است. در مرحله اول نه تنها مشکل حل کردن معادله  $x = 10^{\sqrt{2}}$  را داشتیم بلکه مشکل حل کردن این معادله  $10^x = 2$  یا  $x = \log_{10} 2$  نیز وجود داشت. این مسئله ای نیست که ما برای پاسخ به آن نیاز به معرفی نوع دیگری از اعداد داشته باشیم، بلکه فقط یک مشکل محاسباتی است. جواب به سادگی یک عدد غیر حقیقی است، یک اعشاری بی پایان و نه یک نوع جدید از اعداد.

اجازه دهید اکنون در مورد راه حل های محاسباتی چنین معادلاتی بحث کنیم که ایده اصلی آن بسیار آسان و ساده است، اگر ما بتوانیم  $10^1$ ، و  $10^{4/10}$ ، و  $10^{1/100}$ ، و  $10^{4/1000}$  و... را محاسبه کنیم و همه آن ها را در هم ضرب کنیم، باید  $10^{1414}$  یا  $10^{\sqrt{2}}$  را به دست آوریم. و این همان ایده اصلی برای حل چنین

## فصل ۲۲. جبر

معادلاتی است. اما به جای محاسبه  $۱۰^{۱/۱۰}$  و... ما باید  $۱۰^{۱/۲}$  و  $۱۰^{۱/۴}$  و... را محاسبه کنیم. قبل از شروع، باید توضیح دهیم چرا این همه با  $۱۰$  به جای اعداد دیگر کار می‌کنیم. پیش از این متوجه شدیم که جداول لگاریتمی علاوه بر اینکه در مسئله ریاضیاتی ریشه‌گیری حائز اهمیت هستند، از ارزش کاربردی زیادی نیز برخوردارند، چرا که در هر پایه‌ای داریم:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c. \quad (۳.۲۲)$$

ما همگی با این حقیقت آشناییم که با داشتن جدول لگاریتمی می‌توان به صورت کاربردی از ضرب اعداد استفاده کرد. تنها سؤال این است که با کدام پایه  $b$  باید محاسبه انجام شود؟ در واقع، تفاوتی نمی‌کند که با کدام پایه محاسبه شود، در هر حال ما می‌توانیم همواره از اصل یکسانی استفاده کنیم. اگر ما از لگاریتم‌ها برای هر پایه خاصی استفاده می‌کنیم می‌توانیم برای هر پایه دیگر فقط با تغییر مقیاس، فاکتور ضربش را پیدا کنیم. اگر معادله (۳.۲۲) را در  $۶۱$  ضرب کنیم، با در دست داشتن جدولی از لگاریتم‌ها با پایه  $b$ ، و ضرب همه جدول در  $۶۱$  هیچ تغییر محسوسی به وجود نمی‌آید و معادله هم‌چنان درست باقی می‌ماند. فرض کنید ما همه لگاریتم‌های پایه  $b$  را می‌دانیم یا به بیانی دیگر به کمک جدول می‌توانیم معادله  $b^a = c$  را برای هر  $c$  حل کنیم و مسئله ما پیدا کردن لگاریتم همان عدد  $c$  در پایه دیگر است. فرض کنید که این پایه را  $x$  می‌نامیم. ما می‌خواهیم معادله  $x^{a'} = c$  را حل کنیم که کار ساده‌ای است. به این دلیل که می‌توانیم همیشه  $x = b^t$  را بنویسیم که در آن  $t$  وابسته‌ای از  $x$  و  $b$  است. در واقع  $t = \log_b x$  که با جایگذاری و حل آن برای  $a'$  می‌بینیم که:  $(b^t)^{a'} = b^{a't} = c$ . به بیان دیگر  $ta'$  لگاریتم  $c$  در پایه  $b$  است. در نتیجه  $a' = a/t$  و لگها در پایه  $x$  برابر  $۱/t$  هستند که مقدار ثابتی است برای ضرب در لگهای پایه  $b$ . بنابراین هر جدول لگاریتمی معادل است با هر جدول لگاریتمی دیگر اگر ما آن را در ثابتی ضرب کنیم و این ثابت برابر با  $۱/\log_b x$  است. این کار به ما اجازه می‌دهد که یک پایه مشخص پیدا کنیم و برای همگونی و راحتی کار ما پایه  $۱۰$  را انتخاب می‌کنیم. (سؤالی که ممکن است پیش آید این است که آیا می‌توان پایه طبیعی یا پایه‌ای که به هر طریق ساده‌تر باشد پیدا کرد که ما جواب آن را در ادامه بیان می‌کنیم و فعلاً فقط از پایه  $۱۰$  استفاده می‌کنیم.)

حال بیایید ببینیم چگونه لگاریتم را محاسبه می‌کنند. محاسبه متوالی ریشه‌های دوم  $۱۰$  با آزمون و خطا آغاز این کار است. نتایج این محاسبه در جدول ۱.۲۲ نشان داده شده‌اند. توان‌های  $۱۰$  در اولین ستون و نتیجه  $۱۰^s$  در ستون سوم نشان داده شده است. می‌توانیم ببینیم که مثلاً  $۱۰^۱ = ۱۰$ . توان یک دوم  $۱۰$  را هم می‌توان به راحتی محاسبه کرد، چرا که برابر با ریشه دوم  $۱۰$  است. در اینجا یک روند ساده و آشنایی برای گرفتن ریشه‌های دوم هر عدد وجود دارد. با استفاده از این فرایند ما اولین ریشه دوم را حساب می‌کنیم، که  $۳/۱۶۲۲۸$  است، ولی فایده‌اش چیست؟ این است که به ما می‌گوید چگونه  $۱۰^{۰.۵}$  را بدست آوریم پس حالا حداقل یک لگاریتم را می‌دانیم و اگر ما بخواهیم لگاریتم  $۳/۱۶۲۲۸$  را حساب کنیم می‌دانیم که جواب به  $۰/۵۰۰۰۰$  نزدیک است ولی ما باید کمی بهتر عمل کنیم که این خود به اطلاعات بیشتری نیاز دارد. به این ترتیب ما یک ریشه دوم دیگر هم می‌گیریم و  $۱۰^{۱/۴}$  را پیدا می‌کنیم که  $۱/۷۷۸۲۸$  است. حال ما لگاریتم اعداد بیشتری را نسبت به قبل داریم.  $۱/۲۵۰$  لگاریتم  $۱۷/۷۸$  است و اگر اتفاقاً کسی جواب لگاریتم  $۱۰^{۰.۷۵}$  را پرسید ما می‌توانیم آن را به دست آوریم چرا که جواب برابر  $۱۰^{(۰.۵+۰.۲۵)}$  است که حاصل اعداد ستون دوم و سوم جدول است. اگر ما بتوانیم به اندازه کافی عدد در ستون  $s$  قراردهیم تا قادر به تولید هر نوع عددی

جدول ۱.۲۲: ریشه‌های دوم متوالی عدد ۱۰

| $s$ توان                                       | $10^{24s}$ | $10^s$                | $(10^s - 1)/s$      |
|------------------------------------------------|------------|-----------------------|---------------------|
| ۱                                              | ۱۰۲۴       | ۱۰/۰۰۰۰۰              | ۹/۰۰                |
| ۱/۲                                            | ۵۱۲        | ۳/۱۶۲۲۸               | ۴/۳۲                |
| ۱/۴                                            | ۲۵۶        | ۱/۷۷۸۲۸               | ۳/۱۱۳               |
| ۱/۸                                            | ۱۲۸        | ۱/۳۳۳۵۲               | ۲/۶۶۸               |
| ۱/۱۶                                           | ۶۴         | ۱/۱۵۴۷۸               | ۲/۴۷۶               |
| ۱/۳۲                                           | ۳۲         | ۱/۰۷۴۶۰۷              | ۲/۳۸۷۴              |
| ۱/۶۴                                           | ۱۶         | ۱/۰۳۶۶۳۳              | ۲/۳۴۴۵              |
| ۱/۱۲۸                                          | ۸          | ۱/۰۱۸۱۵۲              | ۲/۳۲۳۴۲۱۱           |
| ۱/۲۵۶                                          | ۴          | ۱/۰۰۹۰۳۵۰             | ۲/۳۱۳۰۱۰۴           |
| ۱/۵۱۲                                          | ۲          | ۱/۰۰۴۵۰۷۳             | ۲/۳۰۷۷ ۵۳           |
| ۱/۱۰۲۴                                         | ۱          | ۱/۰۰۲۲۵۱۱             | ۲/۳۰۵۱ ۲۶           |
|                                                |            |                       | ↓ ۲۶                |
| $\Delta/10^{24}$<br>( $\Delta \rightarrow 0$ ) | $\Delta$   | $1 + 0/0022486\Delta$ | $2/3025 \leftarrow$ |

باشیم سپس با ضرب مقدار مناسبی در ستون ۳ می‌توانیم هر توانی از ۱۰ را به دست آوریم که این راه حل کلی ماست. بنابراین ما ۱۰ ریشه دوم متوالی عدد ۱۰ را محاسبه می‌کنیم و این اصل کار در محاسبات است. به چه دلیل این کار را برای رسیدن به دقت بیش‌تر ادامه ندهیم؟ چرا که چیز دیگری در این میان توجه ما را به خود جلب می‌کند. زمانی که ما ۱۰ را به توان عدد کوچکی می‌رسانیم، حاصل، ۱ به علاوه مقدار ناچیزی می‌شود که دلیل آن آشکار است چرا که باید ۱۰۰۰ اُمین توان  $10^{1/1000}$  را برای رسیدن به ۱۰ بگیریم، بنابراین، بهتر است با اعداد بزرگ کارمان را شروع نکنیم، عدد انتخابی باید نزدیک ۱ باشد. اینجاست که می‌بینیم این اعداد کوچکی را که هر بار به یک اضافه می‌کنیم، به نظر تنها هر بار آن‌ها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، یعنی، ۱۸۱۵ به ۹۰۳ و بعد به ۴۵۰ و ۲۲۵ تبدیل می‌شود. روشن است که برای یک تقریب بهتر اگر ما یک ریشه دیگر بگیریم باید چیزی مثل  $10^{1/112}$  به دست آوریم و به جای اینکه همه ریشه‌های دوم را محاسبه کنیم، می‌توانیم حد نهایی را حدس بزنیم. زمانی که ما یک اعشاری کوچک مثل  $\Delta/10^{24}$  داریم که در آن  $\Delta$  به صفر میل می‌کند، جواب چه خواهد بود؟ طبیعتاً باید یک عددی نزدیک به  $1 + 0/0022511\Delta$  باشد و نه دقیقاً خود  $1 + 0/0022511\Delta$ . هرچند ما می‌توانیم با یک ترفند، نتیجه بهتری بدست آوریم: یک را کم می‌کنیم و سپس بر توان  $s$  تقسیم می‌کنیم و به این ترتیب باید همه اضافات نتیجه قبلی اصلاح شود. می‌بینیم که آن‌ها با اختلاف بسیار کمی معادل همدیگر هستند. البته در بالای جدول برابر نیستند ولی هرچه پایین‌تر می‌آیند به یک مقدار ثابتی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. اما مقداری که از آن صحبت کردیم چیست؟ باز نگاهی می‌کنیم تا ببینیم سری چگونه پیش می‌رود و چگونه با  $s$  تغییر می‌کند. می‌بینیم که تغییرات از ۲۱۱ شروع می‌شود بعد ۱۰۴، سپس ۵۳ و در آخر ۲۶ می‌شود، این تغییرات آشکارا نصف یکدیگر هستند و هر چه کم‌تر می‌شوند به هم نزدیک‌تر نیز می‌شوند. بنابراین، اگر ما به تغییرات ادامه دهیم نتیجه ۱۳، ۷، ۳، ۲، و سرآخر ۱ به دست می‌آید که مجموع همه اینها کم و بیش همان ۲۶ می‌شود. در نتیجه ۲۶ تای دیگر

## فصل ۲۲. جبر

برای ادامه دادن داریم و درمی یابیم که عدد درست  $۲/۳۰۲۵$  است (درواقع ما بعداً می بینم عدد دقیق باید  $۲/۳۰۲۶$  باشد ولی نباید همه چیز را در حساب قربانی واقعی بودن کنیم.) اکنون با این جدول می توانیم هر توانی از  $۱۰$  را با محاسبه  $۱۰۲۴$  اُمین توان ها به دست آوریم.

حالا به محاسبه واقعی لگاریتم می پردازیم، فرایندی که در اینجا به کار می بریم، درواقع خاستگاه جدول های لگاریتمی است. این فرایند در جدول  $۲.۲۲$  و مقادیر عددی هم در جدول  $۱.۲۲$  (ستون ۲ و ۳) نشان داده شده اند.

جدول  $۲.۲۲$ : محاسبه لگاریتم:  $\log_{10} ۲$

$$\begin{aligned} 2 \div 1,77828 &= 1,124682 \\ 1,124682 \div 1,074607 &= 1,046598, \text{ غیره.} \\ \therefore 2 &= (1,77828)(1,074607)(1,036633)(1,009035)(1,000573) \\ &= 10 \left[ \frac{1}{1,024} (256 + 32 + 16 + 4 + 0,254) \right] = 10 \left[ \frac{308,254}{1,024} \right] \\ &= 10^{0,30103} \quad \left( \frac{573}{2249} = 0,254 \right) \\ \therefore \log_{10} 2 &= 0,30103 \end{aligned}$$

فرض کنید می خواهیم از  $۲$  لگاریتم بگیریم، در واقع می خواهیم بدانیم که  $۱۰$  را باید به توان چه عددی برسانیم تا  $۲$  را به دست آوریم؟ آیا می توانیم  $۱۰$  را به توان  $۱/۲$  برسانیم؟ نه این خیلی بزرگ است به عبارتی می توان فهمید که جواب از  $۱/۴$  بزرگ تر و از  $۱/۲$  کوچک تر خواهد شد. بگذارید از  $۱۰^{۱/۴}$  فاکتور بگیریم،  $۲$  را بر  $۱,778 \dots$  تقسیم می کنیم و  $۱,124 \dots$  را به دست می آوریم و... اکنون می دانیم ما  $0,250000$  را از لگاریتم کم کرده ایم، حالا ما باید لگاریتم عدد  $۱,124 \dots$  را به دست آوریم، زمانی که این محاسبه به پایان رسید باید دوباره  $۱/۴$  یا  $256/1024$  را اضافه کنیم. حال برای عدد بعدی، به جدول نگاه می کنیم که درست پایین عدد  $۱,124 \dots$  قرار دارد و برابر است با  $1,074607$ ، پس ما آن را بر  $1,074607$  تقسیم می کنیم و  $1,046598$  را به دست می آوریم. از اینجا ما متوجه می شویم  $۲$  می تواند از عددهای جدول  $۱.۲۲$  به صورت زیر ایجاد شود:

$$2 = (1,77828)(1,074607)(1,036633)(1,009035)(1,000573).$$

اینجا فقط یک فاکتور  $(1,000573)$  باقی مانده است. که طبیعتاً فراتر از محدوده جدول ما است. برای به دست آوردن لگاریتم این فاکتور، ما از این نتیجه که  $10^{4/1024} \approx 1 + 2/3025 \Delta / 1024$  استفاده می کنیم. و  $\Delta = 0,254$  را از آن به دست می آوریم. در نتیجه جواب ما  $۱۰$  به توان  $1024 / (256 + 32 + 16 + 4 + 0,254)$  است. با اضافه کردن اینها به هم ما به  $308,254 / 1024$  می رسیم. این تقسیم به ما  $0,30103$  را می دهد، بنابراین، درمی یابیم که  $\log_{10} 2 = 0,30103$ ، که دقت درستی آن تا پنج رقم اعشار است.

این گونه بود که لگاریتم توسط آقای Briggs of Halifax در سال ۱۶۲۰ محاسبه شد. او گفت: «من توانستم ۵۴ ریشه دوم متوالی  $۱۰$  را حساب کنم.» البته ما می دانیم او تنها ۲۷ تای اول را محاسبه کرده، به

این دلیل که بقیه آن‌ها با استفاده از روش  $\Delta$  به دست می‌آیند. کار او محاسبه متوالی ریشه دوم  $10^e$ ، تا بیست و هفت بار بود که ما در اینجا تنها  $10^e$  تای آن را انجام دادیم. به هر حال او کار پرزحمتی را انجام داد چرا که در ابتدا محاسباتش را تا شانزده رقم اعشار تکمیل کرد اما در هنگام انتشار اثرش آن را به چهارده رقم اعشار کاهش داد و در نتیجه دیگر خطای گرد کردن در کار نبود. به این ترتیب او جدول‌های لگاریتمی را تا  $14$  جایگاه اعشاری ساخت، که واقعاً کار خسته کننده‌ای است. اما تا  $300$  سال بعد از آن هم تمام جداول لگاریتمی، با کاهش تعداد جایگاه اعشاری، همچنان از روش بریگز ساخته می‌شدند. تنها در همین زمان‌های اخیر بود که به کمک WPA و ماشین‌های محاسبه، جداول جدید به صورت مستقل محاسبه شده‌اند. امروزه، راه‌حل‌های بسیار زیاد و مؤثری برای محاسبه لگاریتم با استفاده از بسط سری‌های معین وجود دارد.

روند بالا نکته جالبی به ما نشان داد و آن اینکه برای توانهای بسیار کوچک  $e$  ما می‌توانیم  $10^e$  را به راحتی محاسبه کنیم ما با آنالیز عددی خالص دریافتیم که  $10^e = 1 + 23025e$ . البته این به معنی آن است که اگر  $n$  بسیار کوچک باشد آنگاه  $1 + n = 10^{n/23025}$ . حالا لگاریتم در هر پایه‌ای تنها ضرب لگاریتم‌هایی در پایه  $10$  است. پایه  $10$  از آنجا انتخاب شد که ما فقط  $10$  انگشت داریم و حساب کردن با آن آسان است. ولی اگر به دنبال یک پایه ریاضیاتی طبیعی باشیم، مسئله‌ای است که هیچ ارتباطی با تعداد انگشتان آدم‌ها ندارد، و ما باید سعی کنیم مقیاس لگاریتمی خود را به طور طبیعی و مناسبی تغییر دهیم. روشی که برای این کار انتخاب شده، تعریف دوباره لگاریتم با ضرب همه لگاریتم‌های پایه  $10$  در  $23025$  است. این روش مشابه استفاده از دیگر پایه‌هاست، و آن را پایه طبیعی یا همان پایه  $e$  می‌نامیم. توجه کنید که  $\log_e(1+n) \approx 1+n$  یا  $e^n \approx 1+n$  هنگامی که  $n \rightarrow 0$ .

به سادگی می‌بینیم که  $e = 10^{1/23025}$  برابر با  $10^{0.434294...}$  است که یک توان غیرحقیقی است. جدول ریشه‌های دوم متوالی  $10$  را می‌توان نه تنها برای محاسبه لگاریتم بلکه برای محاسبه هر توانی از  $10$  به کار گرفت. در نتیجه بیابید برای محاسبه پایه طبیعی  $e$  آن را به کار ببریم. برای راحتی ما  $0.434294... \times 23025$  را به  $1024/73$  تبدیل می‌کنیم. حال  $444/73$  برابر با  $6 + 8 + 16 + 32 + 128 + 256$  است، بنابراین، از آنجایی که  $e$  توانی از جمع اعداد است، از ضرب این اعداد به دست می‌آید:

$$(1/77828)(1/33352)(1/74607)(1/36633)(1/18152)(1/9035)(1/1643) = 2/184.$$

(تنها یک مشکل در مورد  $73$  وجود دارد که در جدول موجود نیست. اما می‌دانیم که اگر  $\Delta$  به اندازه کافی کوچک باشد جواب  $\Delta(1 + 23025)$  وقتی که ما همه اینها را در هم ضرب می‌کنیم حاصل  $2/184$  به دست می‌آید (که البته باید  $2/183$  باشد ولی همان هم خوب است). به کارگیری چنین جدول‌هایی روشی است برای محاسبه توان و لگاریتم اعداد غیرحقیقی. روش حل غیرمنطقی‌ها (اعداد غیرحقیقی)!

## ۵.۲۲ اعداد مختلط

حالا معلوم شد که با همه تلاش‌هایی که انجام داده‌ایم هنوز نمی‌توانیم هر معادله‌ای را حل کنیم! برای مثال ریشه دوم  $-1$  چیست؟ فرض می‌کنیم باید جواب  $x^2 = -1$  را پیدا کنیم، مربع هیچ عدد حقیقی، غیرحقیقی و هیچ چیزی که تا الآن شناخته‌ایم برابر  $-1$  نیست. پس ما باید دوباره دست به تعمیم اعدادمان بزنیم تا به یک مجموعه بزرگ‌تر برسیم. بیابید فرض کنیم جواب معادله  $x^2 = -1$  چیزی است بنام  $i$ ؛  $i$ ،

## فصل ۲۲. جبر

طبق تعریف دارای این ویژگی است که توان دومش برابر با  $-۱$  است. این همه آن چیزی است که قرار است در مورد  $i$  بگوییم؛ البته معادله  $x^2 = -1$  بیش از یک ریشه دارد. یکی می‌تواند این را  $i$  بنویسد ولی دیگری بگوید: «نه! من  $-i$  را ترجیح می‌دهم.  $i$  من منفی  $i$  شماسست.» این به عنوان یک جواب خوب است، و تا وقتی که تنها تعریف از  $i$  این است که  $i^2 = -1$ ، هر معادله درستی را که بتوان نوشت باید با تغییر علامت همه  $i$  هایش هم‌چنان درست باقی بماند. این عمل مزدوج مختلط نامیده می‌شود. اکنون ما طبق قوانینی که داریم می‌خواهیم با جمع کردن متوالی  $i$  و همین‌طور ضرب اعداد در آن و جمع کردن عددهای دیگر و...، اعداد جدیدی بسازیم. در این روش می‌بینیم که می‌توان همه اعداد را به شکل  $p + iq$  نوشت، که در آن  $p$  و  $q$  اعداد حقیقی نامیده می‌شوند، یعنی، همان اعدادی که تا اینجا آن‌ها را تعریف کرده‌ایم. عدد  $i$  را عدد واحد (یکه) موهومی می‌نامیم. هر ضرب حقیقی از  $i$ ، موهومی خالص نامیده. عمومی‌ترین اعداد مثل  $a$  به شکل  $p + iq$  است که یک عدد مختلط نامیده می‌شود. اگر برای مثال  $۲$  تا از چنین اعدادی را در هم ضرب کنیم، یعنی،  $(p + iq)(r + is)$ ، اوضاع بیش از این به هم نخواهد ریخت. بنابراین با استفاده از قوانین داریم:

$$\begin{aligned}(r + is)(p + iq) &= rp + r(iq) + (is)p + (is)(iq) \\ &= rp + i(rq) + i(sp) + (ii)(sq) \\ &= (rp - sq) + i(rq + sp),\end{aligned}\quad (۴.۲۲)$$

چون  $i^2 = -1$ ، در نتیجه، همه اعدادی که مشمول قواعد (۱.۲۲) می‌شوند از این فرم ریاضی برخوردارند.

حالا ممکن است بگویید: «این روال می‌تواند همیشه ادامه داشته باشد! ما توان‌های موهومی و... را تعریف کردیم اما همین که این کار تمام شود، یکی می‌آید با معادله‌ای دیگر شبیه  $x^2 + 3x + 2 = 0$  که با آنچه تاکنون می‌دانیم حل نمی‌شود. بنابراین ما باید دوباره به تعمیم بپردازیم!» اما خوشبختانه تنها با همین ایده جدید ریشه دوم  $-۱$ ، همه معادلات جبری را می‌توان حل کرد! این یک حقیقت شگفت‌انگیز است که اثبات آن را باید به عهده ریاضیدان‌ها بگذاریم. اثبات‌ها بسیار زیبا و جالب هستند، با این حال اصلاً بدیهی و آشکار نیستند. در واقع آشکارترین فرض این است که ما مجبوریم پیوسته در حال درک و ابداع باشیم. اما بزرگترین معجزه هم این است که همیشه هم این‌طور نیست و این آخرین ابداع و کاری است که انجام می‌دهیم. بعد از خلق (و یا کشف؟) اعداد مختلط متوجه شدیم که قوانین هنوز با این اعداد همخوانی دارند و به ساختن چیزهای جدیدتر پایان دادیم. ما می‌توانیم توان مختلط هر عدد مختلطی را به دست آوریم. می‌توانیم هر معادله جبری نوشته شده را به شرط محدود بودن تعداد نمادهایش حل کنیم، و به این ترتیب هیچ عدد تازه‌ای را پیدا نخواهیم کرد. برای مثال، ریشه دوم  $i$  یک جواب قطعی دارد و چیز جدیدی نیست، یا  $i^i$  یک جوابی دارد که ما در ادامه به آن می‌پردازیم.

تا اینجا ما در مورد ضرب صحبت کردیم، جمع هم به همین سادگی است، اگر ما دو عدد مختلط را باهم جمع کنیم  $(p + iq) + (r + is)$ ، جواب  $(p + r) + i(q + s)$  خواهد بود. حال ما می‌توانیم اعداد مختلط را جمع و ضرب کنیم اما مشکل اصلی محاسبه توان مختلط اعداد مختلط است. در واقع این مشکل از محاسبه توان مختلط اعداد حقیقی سخت‌تر نیست. پس حالا بیا ببینیم که تنها بریک توان غیرحقیقی از  $۱۰$ ، بلکه بر روی محاسبه  $۱۰$  به توان یک عدد مختلط تمرکز کنیم:  $۱۰^{(r+is)}$ . البته باید در هر حالی از قوانین (۱.۲۲) و (۲.۲۲) پیروی کنیم. بنابراین داریم:

$$۱۰^{(r+is)} = ۱۰^r ۱۰^{is}. \quad (۵.۲۲)$$

اما چون محاسبه  $۱۰^r$  را می‌دانیم و هم‌چنین می‌توانیم هر عددی را در هر عددی ضرب کنیم، پس مشکل فقط محاسبه  $۱۰^{is}$  است. که بگذارید آن را یک عدد مختلط به صورت  $x + iy$  نامگذاری کنیم. مسئله:  $s$  داده شده،  $x$  و  $y$  را پیدا کنید. حال اگر

$$۱۰^{is} = x + iy,$$

مزدوج مختلط این معادله نیز باید درست باشد، بنابراین داریم:

$$۱۰^{-is} = x - iy.$$

(در نتیجه می‌بینیم که می‌توانیم خیلی چیزها را بدون هیچ محاسبه‌ای و تنها با استفاده از قوانین، استنتاج کنیم.) هم‌چنین با ضرب اینها در همدیگر می‌توانیم یک مورد جالب دیگر را نیز استنتاج کنیم:

$$۱۰^{is} ۱۰^{-is} = ۱۰^0 = ۱ = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2. \quad (۶.۲۲)$$

که اگر در آن  $x$  را پیدا کنیم،  $y$  را نیز به دست می‌آوریم.

حال مسئله این است که چگونه  $۱۰$  به توان عددی موهومی را حساب کنیم. چه سرنخی در اینجا نهفته است؟ ممکن است آن قدر با این قوانین سروکله بزنیم که دیگر راهی باقی نماند و نتوانیم پیش‌تر برویم، اما درست همین‌جا سرنخی منطقی به دست می‌آید: اگر ما می‌توانیم آن را برای هر  $s$  مشخصی حل کنیم برای بقیه نیز خواهیم توانست. اگر ما جواب  $۱۰^{is}$  را برای هر  $s$  بدانیم و بعد اگر ما آن را برای دو برابر  $s$  بخواهیم، می‌توانیم جواب به دست آمده برای  $s$  را به توان دو برسانیم و به همین ترتیب ادامه دهیم. ولی چگونه می‌توانیم  $۱۰^{is}$  را برای یک مقدار مشخص  $s$  پیدا کنیم؟ برای این کار ما یک فرض جدید می‌سازیم که تقریباً در قالب این قواعد نمی‌گنجد، اما ما را به یک نتیجه منطقی می‌رساند و به ما اجازه می‌دهد تا این فرایند را ادامه دهیم: زمانی که توان کوچک است، هرچه  $\epsilon$  کوچک‌تر می‌شود باید فرض کنیم «قانون»  $۱۰^\epsilon = ۱ + ۲۳۰۲۵\epsilon$  نه تنها برای  $\epsilon$  حقیقی بلکه برای  $\epsilon$  مختلط نیز درست است. در نتیجه ما فرض را بر آن می‌گذاریم که این قانون در حالت کلی نیز درست است و به ما می‌گوید که وقتی  $s$  به سمت  $۰$  میل می‌کند، داریم  $۱۰^{is} = ۱ + ۲۳۰۲۵i$ . پس در نظری‌گیریم که اگر  $s$  بسیار کوچک باشد، یعنی به اندازه  $۱/۱۰۲۴$ ، آنگاه تقریب نسبتاً بهتری برای  $۱۰^{is}$  خواهیم داشت.

اکنون ما جدولی تهیه می‌کنیم که در آن می‌توانیم همه توان‌های موهومی  $۱۰$  را محاسبه کنیم، که به دنبال این محاسبه،  $x$  و  $y$  را نیز به دست می‌آوریم. اولین توانی که ما کار را با آن شروع می‌کنیم  $۱/۱۰۲۴$  است که فرض می‌کنیم خیلی به  $۱ + ۲۳۰۲۵i/۱۰۲۴$  نزدیک است. نهایتاً اینگونه می‌نویسیم که:

$$۱۰^{i/۱۰۲۴} = ۱/۰۰۰۰۰ + ۰/۰۰۲۲۴۸۶i, \quad (۷.۲۲)$$

و اگر به ضرب کردن عدد در خودش ادامه دهیم، می‌توانیم به توان موهومی بالاتری برسیم. درواقع، شاید همین کافی باشد که روال ساخت جدول‌های لگاریتمی را وارونه کنیم، و توان دوم، چهارم و هشتم و ... فرمول (۷.۲۲) را محاسبه کنیم و به این ترتیب، مقادیر نشان داده شده در جدول ۳.۲۲ را به دست آوریم. در اینجا ما متوجه مسئله جالبی شدیم که نشان می‌دهد عدد  $x$  در ابتدا مثبت بوده ولی بعداً به منفی تبدیل شده است. ما می‌توانیم در این لحظه کمی بیشتر به آن بپردازیم. اما اول باید کنجکاو باشیم تا بفهمیم برای چه

جدول ۳.۲۲: توان‌های متوالی  $i$  با  $10^{i/10^{24}} = 1 + 0.0022486i$

| $i$ توان                 | $10^{24}s$ | $10^{is}$               |
|--------------------------|------------|-------------------------|
| $i/10^{24}$              | ۱          | $1.000000 + 0.00225i$ * |
| $i/512$                  | ۲          | $1.000000 + 0.00450i$   |
| $i/256$                  | ۴          | $0.999996 + 0.00900i$   |
| $i/128$                  | ۸          | $0.999984 + 0.01800i$   |
| $i/64$                   | ۱۶         | $0.999936 + 0.03599i$   |
| $i/32$                   | ۳۲         | $0.999742 + 0.07193i$   |
| $i/16$                   | ۶۴         | $0.998967 + 0.14349i$   |
| $i/8$                    | ۱۲۸        | $0.995885 + 0.28402i$   |
| $i/4$                    | ۲۵۶        | $0.83872 + 0.54467i$    |
| $i/2$                    | ۵۱۲        | $0.40679 + 0.91365i$    |
| $i/1$                    | ۱۰۲۴       | $-0.66928 + 0.74332i$   |
| * باید باشد $0.0022486i$ |            |                         |

مقادیری از  $s$  قسمت حقیقی  $10^{is}$  برابر صفر است. مقدار  $y$  باید  $i$  باشد پس باید داشته باشیم  $i = 10^{is}$  یا  $i = \log_{10} i$ . به عنوان مثالی از کاربرد این جدول، همانگونه که  $\log_{10} 2$  را پیش از این محاسبه کردیم، حالا از جدول ۳.۲۲ برای پیدا کردن  $\log_{10} i$  استفاده می‌کنیم.

کدام یک از اعداد جدول ۳.۲۲ را باید در هم ضرب کنیم تا یک جواب موهومی خالص به دست آوریم؟ بعد از کمی آزمون و خطا متوجه می‌شویم که برای بیش‌ترین کاهش  $x$ ، بهترین راه ضرب ۵۱۲ در ۱۲۸ است. که با  $0.99159i + 0.13056$  برابر است. سپس درمی‌یابیم که باید این را در عددی که بخش موهومی آن تقریباً برابر اندازه بخش حقیقی، که ما خواهان حذف آن هستیم، ضرب کنیم. به همین خاطر ما ۶۴ را انتخاب می‌کنیم چون مقدار  $y$  آن برابر  $0.14349$  است که به  $0.13056$  نزدیک‌ترین مقدار است. تا اینجا داریم  $0.999996 + 0.00900i$  بر مقدار  $0.1308 + 0.999998i$ . حالا مقداری اضافی داریم و باید نتیجه را بر مقدار  $0.999996 + 0.00900i$  تقسیم کنیم. خُب چگونه این کار را انجام دهیم؟ با تغییر علامت  $i$  و ضرب در مقدار  $0.999996 - 0.00900i$ ، که با توجه به  $x^2 + y^2 = 1$ ، درست است. با ادامه این روش می‌فهمیم که کل مقداری که  $10$  باید به توان آن برسد تا  $i$  به دست بیاید عبارت است از:  $(0.20 + 2 - 4 - 64 + 128 + 512) / 10^{24}$ ، یا  $698.20i / 10^{24}$ ، اگر ما  $10$  را به این توان برسانیم می‌توانیم  $i$  را به دست آوریم، در نتیجه:  $\log_{10} i = 0.68184i$ .

## ۶.۲۲ توان‌های موهومی

برای جست‌وجوی بیش‌تر در مورد توان‌های مختلط موهومی، بیایید به توان‌های پی‌درپی  $10$ ، که البته منظور از آن، توان گرفتن دوباره نیست، نگاهی بیندازیم، تا ببینیم جدول ۳.۲۲ چگونه پیش می‌رود و چه اتفاقی برای علامت‌های منفی می‌افتد. این مسئله در جدول ۴.۲۲ نشان داده شده است که در آن  $10^{i/8}$  را گرفتیم و به همین منوال به ضرب کردن آن ادامه دادیم. می‌بینیم که  $x$  کاهش می‌یابد، از صفر عبور می‌کند و به  $-1$  تغییر علامت می‌دهد (اگر بتوانیم به فاصله میان  $p = 10$  و  $p = 11$  برویم به طور آشکار به  $-1$  تغییر

جدول ۴.۲۲: توان‌های متوالی  $۱۰^{i/۸}$ 

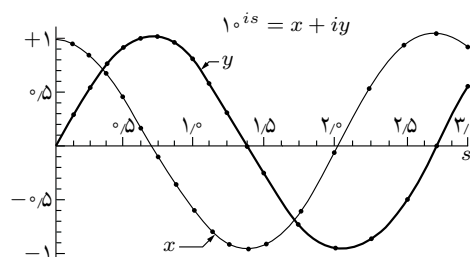
| $p = ۸/i$ توان | $۱۰^{ip/۸}$           |
|----------------|-----------------------|
| ۰              | $۱/۰۰۰۰۰ + ۰/۰۰۰۰۰i$  |
| ۱              | $۰/۹۵۸۸۲ + ۰/۲۸۴۰۲i$  |
| ۲              | $۰/۸۳۸۶۷ + ۰/۵۴۴۶۵i$  |
| ۳              | $۰/۶۴۹۴۴ + ۰/۷۶۰۴۲i$  |
| ۴              | $۰/۴۰۶۷۲ + ۰/۹۱۳۵۶i$  |
| ۵              | $۰/۱۳۰۵۰ + ۰/۹۹۱۴۶i$  |
| ۶              | $-۰/۱۵۶۴۷ + ۰/۹۸۷۷۰i$ |
| ۷              | $-۰/۴۳۰۵۵ + ۰/۹۰۲۶۰i$ |
| ۸              | $-۰/۶۶۹۱۷ + ۰/۷۴۳۱۵i$ |
| ۹              | $-۰/۸۵۲۶۸ + ۰/۵۲۲۴۹i$ |
| ۱۰             | $-۰/۹۶۵۹۶ + ۰/۲۵۸۸۰i$ |
| ۱۱             | $-۰/۹۹۹۶۹ - ۰/۰۲۶۲۰i$ |
| ۱۲             | $-۰/۹۵۱۰۴ - ۰/۳۰۹۰۵i$ |
| ۱۴             | $-۰/۶۲۹۲۸ - ۰/۷۷۷۱۷i$ |
| ۱۶             | $-۰/۱۰۴۴۷ - ۰/۹۹۴۵۳i$ |
| ۱۸             | $+۰/۴۵۴۵۴ - ۰/۸۹۰۹۸i$ |
| ۲۰             | $+۰/۸۶۶۴۸ - ۰/۴۹۹۶۷i$ |
| ۲۲             | $+۰/۹۹۸۸۴ + ۰/۰۵۲۸۷i$ |
| ۲۴             | $+۰/۸۰۸۹۰ + ۰/۵۸۸۳۶i$ |

علامت می‌دهد) و دوباره به سوی مثبت برمی‌گردد و تغییر علامت می‌دهد. مقدار  $y$  نیز به همین ترتیب در نوسان است.

در شکل ۱.۲۲، نقطه‌ها بیانگر عددهای جدول ۴.۲۲ هستند و خطوط، تنها برای اینکه روند این نقاط بهتر دیده شود، کشیده شده‌اند. می‌بینیم که اعداد  $x$  و  $y$  نوسان می‌کنند.  $۱۰^{is}$  خود را تکرار می‌کند و یک چیز تناوبی است و توضیح آن به‌خودی خود آسان است به این خاطر که اگر یک توان معینی برابر با  $i$  باشد، توان چهارمش باید توان دوم  $i^2$  باشد. که دوباره همان  $۱$  خواهد بود و در نتیجه از آنجا که  $۱۰^{۰/۶۸i}$  برابر با  $i$  است با گرفتن توان چهارم، درمی‌یابیم که  $۱۰^{۲/۲۲i}$  برابر با  $۱$  است. بنابراین، اگر ما برای مثال  $۱۰^{۳/۰۰i}$  را بخواهیم، می‌توانیم آن را به شکل  $۱۰^{۲/۲۲i}$  در  $۱۰^{۰/۲۸i}$  بنویسیم. به عبارت دیگر، دارای تناوب است، و تکرار می‌شود. البته حالا متوجه شدیم، منحنی‌ها چه شکلی هستند. آن‌ها مثل سینوس و کسینوس هستند و تا اینجا باید آن‌ها را سینوس و کسینوس جبری بنامیم. گرچه به جای استفاده از پایه  $۱۰$  ما باید آن‌ها را در پایه طبیعی قرار دهیم که تنها مقیاس افقی را تغییر می‌دهد، و ما  $t$  را با  $۲/۳۰۲۵s$  نشان می‌دهیم و می‌نویسیم  $۱۰^{is} = e^{it}$  و در آن  $t$  یک عدد حقیقی است. حال داریم  $e^{it} = x + iy$  و الآن باید این فرمول را به صورت کسینوس جبری  $t$  به علاوه  $i$  در سینوس جبری  $t$  بنویسیم. در نتیجه داریم:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad (۸.۲۲)$$

مشخصات سینوس و کسینوس  $t$  چه هستند؟ ابتدا ما می‌دانیم که برای مثال  $x^2 + y^2$  باید برابر با  $۱$  شود



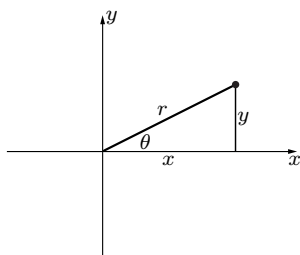
شکل ۱.۲۲

که قبلاً آن را ثابت کرده‌ایم، و همانگونه که برای پایه  $e$  درست است برای پایه  $1^{\circ}$  نیز درست است. بنابراین  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ . هم‌چنین می‌دانیم برای  $t$  های کوچک،  $e^{it} = 1 + it$  و در نتیجه  $\cos t$  تقریباً برابر با  $1$  و  $\sin t$  تقریباً با  $t$  برابر است و به همین ترتیب پیش می‌رود، تا جایی که همهٔ مشخصات مختلف این تابع‌های مهم، که با توان‌های موهومی به‌دست آمده‌اند، با سینوس‌ها و کسینوس‌های مثلثاتی یکی هستند. آیا تناوب آن‌ها هم یکی است؟ بیایید ببینیم!  $e$  به توان چه عددی برابر با  $i$  می‌شود؟ لگاریتم  $i$  در پایه  $e$  چه می‌شود؟ ما قبلاً این کار را انجام داده‌ایم و در پایه  $1^{\circ}$  جواب آن  $i \approx 0.6818184$  بود. اما زمانی که ما مقیاس لگاریتمی خود را به  $e$  تغییر می‌دهیم، باید آن را در  $2.3025$  ضرب کنیم و اگر این کار را انجام دهیم  $1.5708$  از آن به‌دست می‌آید، و آن را مقدار جبری  $\pi/2$  می‌نامیم. که با  $\pi/2$  معمول به واسطهٔ مکان آخرین نقطهٔ فرق دارد که نتیجهٔ خطای محاسباتی ماست! بنابراین ما دو تابع تازه را تنها به کمک روش جبری ساختیم، یعنی، سینوس و کسینوسی که فقط و فقط متعلق به جبر هستند. در نهایت، نتیجه این است که بین جبر و هندسه رابطه‌ای وجود دارد.

اگر بخواهیم خلاصه بگوییم، این فرمول بسیار مهم در ریاضیات می‌شود که:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (9.22)$$

و این همان گوهر باارزش ماست.

شکل ۲.۲۲:  $x + iy = re^{i\theta}$ 

می‌توانیم با نمایش اعداد مختلط در صفحه، هندسه و جبر را به هم ارتباط دهیم. مکان نقطه در محور افقی را با  $x$  و در محور عمودی با  $y$  نشان می‌دهیم (شکل ۲.۲۲). هر عدد مختلط را با  $x + iy$  نمایش می‌دهیم، سپس اگر فاصله شعاعی تا این نقطه را  $r$  بنامیم و زاویه را  $\theta$  بنامیم، قاعدهٔ جبری آن می‌شود  $x + iy$  که به شکل  $re^{i\theta}$  نوشته می‌شود، که در آن روابط هندسی بین  $x$ ،  $y$ ،  $r$  و  $\theta$  نشان داده شده‌اند و نمایانگر وحدت جبر و هندسه است.

وقتی این فصل را شروع کردیم فقط نمادهای ابتدایی و اعداد صحیح و اصل شمارش را در اختیار داشتیم، ما ایده‌های کمی در مورد کارایی انتزاع و تعمیم داشتیم. با استفاده از مجموعه قوانین جبری یا همان ویژگی‌های اعداد، معادله (۱.۲۲) و تعریف عملگرهای وارون (۲.۲۲)، توانستیم نه تنها اعداد را بلکه چیزهای مفید دیگری مثل جدول‌های لگاریتم توان‌ها و توابع مثلثاتی را ایجاد کنیم (برای اینکه آنها توان‌های موهومی اعداد حقیقی هستند)، و همه اینها با ده ریشه دوم متوالی عدد  $10$  به دست آمده‌اند!