

شناسنامه

The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Ch. 14

درسنامه‌های فیزیک فاینمن، جلد ۱، فصل ۱۴

مترجم: سارا حاجلی

ویراستار و حروفچین: علی باقری کوچکسرائی، علیرضا غفاری مخملباف

نسخه‌ی ۱۰ بهار ۱۳۹۹

حلقه‌ی مترجمان ژرفا

این اثر با کسب مجوز از ناشر بین‌المللی به منظور انتشار رایگان نسخه‌ی الکترونیکی آن تهیه شده است و حق نشر آن برای انجمن علمی ژرفا مستقر در دانشگاه صنعتی شریف محفوظ می‌باشد. ایرادات این نسخه را با ما در میان بگذارید و در پیشبرد این پروژه‌ی عام‌المنفعه مشارکت کنید. برای دریافت ترجمه‌ی دیگر فصل‌های این کتاب به وبسایت ژرفا مراجعه کنید.

www.Zharfa90.ir

این صفحه مخصوصاً خالی گذاشته شده است.

فصل ۱۴

کار و انرژی پتانسیل (جمع بندی)

۱۰.۱۴ کار

ما در فصل قبل تعداد بسیار زیادی از نظریات و نتایجی را که در فیزیک نقشی محوری دارند ارائه کردیم. این نظریات به قدری پراهمیت هستند که به نظر می‌رسد ارزش داشته باشد که یک فصل کامل را به بررسی دقیق‌تر آنها اختصاص دهیم. در این فصل لازم نیست که اثبات‌ها و یا ترفندهای به‌خصوصی را که نتایج به وسیله‌ی آنها به‌دست آمده، تکرار کنیم؛ اما در عوض باید روی بحث درباره‌ی خود نظریات تمرکز کنیم.

در یادگیری هر مبحثی از یک ماهیت فنی، جایی که ریاضیات نقشی بازی می‌کند، فرد مواجه می‌شود با وظیفه‌ی درک و حفظ کردن حجم عظیمی از حقایق و نظریات که توسط روابط معینی در کنار هم نگه داشته می‌شوند، که این روابط می‌توانند یا اثبات شوند و یا نشان داده شوند که بین آنها برقرارند. به سادگی می‌شود خود اثبات را با رابطه‌ای که دارد آن را تصدیق می‌کند اشتباه گرفت. به وضوح مهم این است که رابطه را یاد بگیریم و به یاد بسپاریم، نه اثبات را. در هر حالت به‌خصوصی یا می‌توانیم بگوییم «می‌توان نشان داد که فلان چیز درست است» و یا اینکه خودمان آن را نشان دهیم. تقریباً در تمام موارد، اثبات معینی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، اول از همه به نوعی شکل می‌گیرد که بتواند به راحتی و در اندک زمان روی تخته سیاه یا کاغذ نوشته شود و نتیجه تا حد امکان روان خواهد بود. پس، اثبات ممکن است به شکل فریبنده‌ای ساده به نظر برسد، در حالی که در واقع، نویسنده احتمالاً ساعت‌ها روی آن کار کرده و راه‌های مختلف محاسبه‌ی یک چیز واحد را امتحان کرده باشد تا اینکه شسته و رفته ترین راه را پیدا کند به شکلی که بتوان نشان داد که می‌تواند در کوتاه‌ترین زمان ممکن ظاهر شود! در حین مشاهده‌ی یک اثبات، چیزی که باید به یاد سپرد خود اثبات نیست، بلکه این است که می‌توان نشان داد که فلان چیز درست است. البته اگر اثبات، روندها و یا لم‌هایی ریاضیاتی را در بر می‌گیرد که شخص قبلاً آنها را ندیده است، توجهش باید معطوف شود نه به لم دقیقاً، بلکه به ایده‌ی ریاضیاتی وارد شده.

قطع به یقین در تمام اثبات‌هایی که در زمینه‌هایی چون این شکل می‌گیرند، نویسنده هیچ‌کدام را از زمانی یادآوری نمی‌کند که فیزیک مبتدی و سال اول را می‌آموخته؛ کاملاً برعکس، او فقط به یاد می‌آورد که فلان و فلان صحیح است و برای اینکه چگونگی نشان دادن آن را شرح دهد، در زمانی که نیاز هست یک رویه اثبات ابداع می‌کند. هر کسی که مبحثی را واقعاً یاد گرفته باشد، باید قادر به طی کردن رویه‌ی مشابهی باشد اما به یاد سپردن اثبات‌ها هیچ لزومی ندارد. به همین دلیل است که ما در این فصل باید از اثبات‌های عبارت‌های

مختلفی که قبلاً ساخته شده‌اند، اجتناب کنیم و صرفاً نتایج را جمع‌بندی کنیم. اولین چیزی که باید حل و بررسی شود، کار انجام شده توسط یک نیرو است. واژه‌ی فیزیکی «کار» همان واژه در معنای عام «کارگران جهان، متحد شوید!»^۱ نیست بلکه معنای دیگری دارد. کار فیزیکی به شکل $\int F \cdot ds$ بیان می‌شود و «انتگرال خطی F ضرب نقطه‌ای در ds خوانده می‌شود؛ به این معنی که اگر برای مثال نیرو در یک جهتی باشد و جسمی که نیرو دارد رویش کار انجام می‌دهد، در یک جهت مشخصی جابه‌جا شود، آنگاه تنها مؤلفه‌ای از نیرو کار انجام می‌دهد که در راستای جابه‌جایی باشد. مثلاً اگر نیرو ثابت باشد و جابه‌جایی هم یک مسافت محدود ΔS باشد، آنگاه کار انجام شده در حرکت دادن جسم در طی آن مسافت برابر است با تنها مؤلفه‌ی در راستای ΔS نیرو ضرب در ΔS قاعده «نیرو ضرب در مسافت» است اما در حقیقت منظور ما تنها مؤلفه‌ای از نیرو است که در راستای جابه‌جایی باشد، ضرب در ΔS ؛ یا به عبارتی، مؤلفه‌ای از جابه‌جایی که در راستای نیرو باشد، ضرب در F . این بدیهی است که توسط نیرویی که عمود بر جابه‌جایی وارد شود، به هیچ وجه کاری انجام نمی‌شود.

حال اگر مسافت ΔS به مؤلفه‌های شکسته شود، به عبارتی، اگر جابه‌جایی حقیقی ΔS باشد و ما بخواهیم آن را به‌طور مؤثر به عنوان مؤلفه‌ی جابه‌جایی Δx در جهت x ، Δy در جهت y و Δz در جهت z در نظر بگیریم، آنگاه کار انجام شده در انتقال یک جرم از یک مکان به مکانی دیگر می‌تواند در سه مرحله محاسبه شود؛ با محاسبه‌ی کار انجام شده در راستای x ، در راستای y و در راستای z . کار انجام شده در حرکت در راستای x ، تنها همان مؤلفه از نیرو را در بر می‌گیرد، به نام F_x و به همین ترتیب برای بقیه؛ در نتیجه کار برابر است با $F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$. زمانی که نیرو ثابت نیست و ما یک حرکت منحنی پیچیده داریم، باید مسیر را به تعداد زیادی از ΔS ها تقسیم کنیم، کار انجام شده در انتقال جسم روی هر ΔS را با هم جمع کنیم و حدگیری کنیم برای حالتی که ΔS به سمت صفر میل کند. این، معنی انتگرال خطی است.

هرچه تا الان گفتیم در فرمول $W = \int F \cdot ds$ گنجانده شده است. اینها همه آنقدر خوب هستند که می‌توان گفت این فرمول شگفت انگیز است اما این مسئله چیز دیگری است تا اینکه درک کنیم این فرمول چه معنای می‌دهد و یا پاره‌ای از نتایج منطقی آن چیست.

واژه‌ی «کار» در فیزیک معنی بسیار متفاوتی از آنچه در حالت عام استفاده می‌شود را دارد و این مسئله باید به دقت بررسی شود که برخی حالات خاص وجود دارند که در آنها این دو معنی متفاوت ظاهر می‌شوند. برای مثال، با استناد به تعریف فیزیکی کار، اگر شخصی یک جرم ۱۰۰ پوندی را برای لحظه‌ای از روی زمین بلند کند، او هیچ کاری انجام نمی‌دهد. در صورتی که هرکسی می‌داند که شخص شروع به تعلق و لرزیدن می‌کند و سخت‌تر نفس می‌کشد؛ همانطور که اگر از یک سلسله پلکان به بالا می‌دوید. تا به اینجا از پله‌ها به بالا دویدن، انجام کار محسوب می‌شود (در دویدن به پایین پله‌ها، بر اساس علم فیزیک، شخص از محیط کار دریافت می‌کند) اما در نگه‌داشتن یک جسم در یک موقعیت ثابت، هیچ کاری انجام نمی‌شود. به وضوح، تعریف فیزیکی از کار با تعریف فیزیولوژیکی آن تفاوت دارد؛ به دلایلی که باید به‌طور خلاصه آنها را کاوش کنیم.

این یک حقیقت است که وقتی شخصی وزنه‌ای را نگه می‌دارد، باید کار فیزیولوژیکی انجام دهد. چرا او باید عرق کند؟ چرا او باید غذا بخورد تا بتواند وزنه را بالا نگه دارد؟ چرا دستگاه درون بدنش دارد با نهایت قدرت کار می‌کند، فقط برای اینکه وزنه را بالا نگه دارد؟ در واقع جسم می‌توانست بدون هیچ کوششی، تنها با قرار دادن آن روی یک میز بالا نگه داشته شود؛ آنگاه میز آرام و بی‌صدا، بدون هیچ انرژی ذخیره شده‌ای،

^۱ این عبارت یک شعار سیاسی و یکی از معروف‌ترین تقویت‌کنندگان اعتراض علیه کمونیسم است.

قادر به نگه داشتن همان وزن در همان ارتفاع می‌بود. وضعیت فیزیولوژیکی چیزی به این شکل است: دو نوع عضله در بدن انسان و دیگر حیوانات وجود دارد: یک نوع به نام عضلات خط‌دار یا اسکلتی، عضلاتی هستند که ما در دستانمان داریم برای مثال، آنهایی که تحت کنترل ارادی هستند؛ نوع دیگر، به نام عضلات صاف، شبیه عضله‌ی روده است یا عضله‌ی نزدیک‌کننده‌ی بزرگتری که در حالت سکون پوست را می‌بندد. عضلات صاف بسیار آرام کار می‌کنند اما می‌توانند یک دستگاه را نگه دارند، به این شکل می‌توان گفت که وقتی صدف سعی می‌کند غشایش را در یک وضعیت خاص ببند، این وضعیت حفظ می‌شود، حتی اگر نیروی بسیار قدرتمندی در راستای تغییر آن وجود داشته باشد. او برای ساعت‌ها زیر بار حفظ کردن یک وضعیت خواهد بود، بدون خسته شدن که این بسیار شبیه به میزی است که وزنی را بالا نگه داشته باشد و در یک وضعیت خاص قرار می‌گیرد که تنها مولکول‌ها آنجا موقتاً قفل می‌شوند، بدون اینکه کاری انجام شود یا اینکه تلاشی از طرف صدف صورت بگیرد. این واقعیت که ما باید برای بالا نگه داشتن یک وزنه تلاشی کنیم، به سادگی وابسته به طراحی عضله‌ی اسکلتی است. اتفاقی که می‌افتد این است که وقتی یک پیام عصبی به یک بافت عضلانی می‌رسد، آن بافت ابتدا یک کشش کوتاه دارد و بعد شل می‌شود، در نتیجه زمانی که ما چیزی را بالا نگه می‌داریم، رگبار عظیمی از پیام‌های عصبی وارد عضله می‌شوند و تعداد زیادی از کشش‌ها در حال نگه داشتن وزنه می‌باشند، در حالی که بافت‌های دیگر در سکون‌اند. البته ما می‌توانیم این را مشاهده کنیم: وقتی که ما یک وزنه‌ی سنگین را نگه می‌داریم و خسته می‌شویم، شروع به لرزیدن می‌کنیم. دلیلش این است که رگبارها (ی پیام عصبی) دارند به‌طور نامنظم می‌رسند و عضله خسته شده و به سرعت کافی عکس‌العمل نشان نمی‌دهد. چرا یک همچین رویه‌ی ناکارآمدی؟ ما دقیقاً نمی‌دانیم چرا، اما تکامل تا الان نتوانسته عضله‌ی صاف سریع‌تأمین کند. عضله‌ی صاف می‌توانست بسیار تأثیرگذارتر باشد برای بالا نگه داشتن وزنه چرا که شما تنها آنجا می‌ایستادید و آن هم قفل می‌کرد؛ هیچ کاری در بر گرفته نمی‌شد و هیچ انرژی‌ای مورد نیاز واقع نمی‌شد؛ هرچند که عیبی دارد و این است که بسیار کند عمل می‌کند.

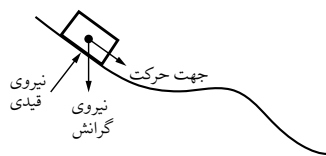
به فیزیک بازمی‌گردیم، ما می‌توانیم بپرسیم چرا می‌خواهیم کار انجام شده را محاسبه کنیم؟ پاسخ این است که از آنجایی که کار انجام شده توسط برآیند تمام نیروهای وارد بر یک ذره روی آن، دقیقاً برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره، این کار جذاب و سودمند است. یعنی اینکه اگر یک جرم هل داده شود، سرعت می‌گیرد و

$$\Delta(v^2) = \frac{2}{m} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}.$$

۲۰۱۴ حرکت مقید

خصیصه‌ی دیگر کار و نیروها این است که، فرض کنید که ما یک سطح شیب‌دار یا یک مسیر منحنی داریم و یک ذره که باید روی آن حرکت کند اما بدون اصطکاک. یا می‌توانیم یک آونگ داشته باشیم به همراه یک فنر و یک وزنه؛ فنر، وزنه را وادار به حرکت روی یک دایره حول رأس محور می‌کند. رأس محور ممکن است به واسطه‌ی برخورد فنر با یک میخ تغییر کند در نتیجه مسیر چرخش وزنه در راستای دو دایره با شعاع‌های متفاوت قرار می‌گیرد. اینها مثال‌هایی است از آنچه ما قیدهای ثابت نگه داشته شدن و عدم وجود اصطکاک می‌نامیم.

در حرکت با قید ثابت نگه داشته شدن و بی‌اصطکاک بودن، هیچ کاری توسط قید انجام نمی‌شود، زیرا نیروهای قیدی همواره عمود بر حرکت هستند. منظور ما از «نیروهای قیدی» آن دسته از نیروها هستند که

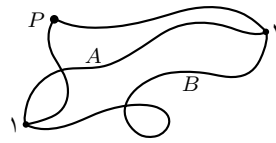


شکل ۱۰.۱۴: نیروهای وارد بر یک جرم در حال لغزش (بدون اصطکاک).

مستقیماً از طرف خود قید بر جرم وارد می‌شوند نیروی تماس با سطح یا نیروی کشش در طناب. نیروهای وارد در حرکت یک ذره روی یک سطح شیبدار که تحت تأثیر گرانش در حال حرکت است، واقعاً پیچیده هستند به دلیل اینکه یک نیروی قیدی، یک نیروی گرانش و از این قبیل نیروها وجود دارند. گرچه اگر ما محاسباتمان از این حرکت را بر مبنای انرژی ذخیره شده و نیروی گرانش به تنهایی بگذاریم، به نتیجه‌ی درست خواهیم رسید. به نظر تا حدودی عجیب می‌رسد چرا که این، راه اکیداً درستی برای انجام این کار نیست؛ ما باید برآیند نیروها را به کار ببریم. هرچند، کار انجام شده توسط نیروی گرانش به تنهایی برابر خواهد بود با تغییر انرژی جنبشی؛ زیرا کار انجام شده توسط بخش قیدی نیرو، صفر است (شکل ۱۰.۱۴). ویژگی مهمی که در این جا وجود دارد این است که اگر یک نیرو بتواند به صورت جمع دو یا چند جزء تحلیل و بررسی شود، در نتیجه کار انجام شده توسط نیروی برآیند در حرکت روی یک خم به خصوص برابر است با جمع کارهای انجام شده توسط مؤلفه‌های مختلفی که نیرو به آنها تجزیه و تحلیل شده. در نتیجه اگر ما نیرو را به عنوان بردار برآیند چند اثر در نظر بگیریم، اثرات گرانشی به علاوه‌ی نیروهای قیدی و از این قبیل، یا مؤلفه‌ی x همه‌ی نیروها و مؤلفه‌ی y همه‌ی نیروها و یا به هر طریق دیگری که ما بخواهیم آن را بشکنیم، آنگاه کار انجام شده توسط نیروی برآیند برابر است با جمع کارهای انجام شده توسط تمام اجزائی که ما در روند تحلیل، نیرو را به آنها شکسته‌ایم.

۳.۱۴ نیروهای پایستار

در طبیعت نیروهای به خصوصی وجود دارند، برای مثال گرانش، که یک ویژگی بسیار قابل توجه دارند که ما آن را «پایستار بودن» می‌خوانیم (هیچ منظور سیاسی‌ای در کار نیست، این هم یکی از آن واژگان نابخردانه است). اگر ما محاسبه کنیم که چه مقدار کار در حرکت یک جرم از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر روی مسیری منحنی توسط یک نیرو انجام شده است؛ به طور معمول کار وابسته به مسیر است، اما در موقعیت‌های خاصی وابسته نیست. اگر وابسته به مسیر نباشد، می‌گوییم که نیرو، یک نیروی پایستار است. به بیانی دیگر، اگر انتگرال نیرو ضرب در فاصله در حرکت از موقعیت ۱ به موقعیت ۲ در شکل ۲.۱۴ روی منحنی A و بعد روی منحنی B محاسبه شود، ما به همان مقدار ژول می‌رسیم؛ و اگر این حالت برای این جفت از نقاط روی هر منحنی درست باشد و بدون اهمیت به این که کدام جفت نقاط را استفاده می‌کنیم، روند مشابهی کارساز باشد؛ در این صورت می‌گوییم که این نیرو پایستار است. در چنین شرایطی انتگرال کار در مسیر ۱ تا ۲، به سادگی قابل محاسبه است و می‌توانیم برای نتیجه فرمولی بدهیم. در حالت عادی این کار اینقدر ساده نیست؛ چرا که ناچاریم منحنی را هم مشخص کنیم، اما در شرایطی که کار به مسیر بستگی ندارد قطعاً فقط به موقعیت ۱ و ۲ بستگی دارد.



شکل ۳.۱۴: مسیرهای ممکن بین دو نقطه در یک میدان نیرو.

برای نشان دادن این ایده، این طور فرض کنید که ما نقطه‌ی متعارف P را در یک موقعیت انتخابی در نظر بگیریم (شکل ۳.۱۴). حال انتگرال خطی کار از ۱ به ۲ که می‌خواهیم محاسبه‌اش کنیم، می‌تواند برابر کار انجام شده در حرکت از ۱ به P به علاوه‌ی کار انجام شده در حرکت از P به ۲ تعیین شود چراکه نیروها پایستار هستند و کار به منحنی بستگی ندارد. حالا کار انجام شده در حرکت از نقطه‌ی P به یک مکان خاص در فضا، تابعی است از موقعیت فضایی آن مکان. البته در واقع به P هم بستگی دارد، اما ما در روند تحلیل، نقطه‌ی دلخواه P را همواره ثابت نگه می‌داریم. در این صورت کار انجام شده در مسیر نقطه‌ی P به نقطه‌ی ۲، تابعی از مکان نهایی ۲ می‌شود. بستگی به این دارد که نقطه ۲ کجاست، اگر به نقطه‌ی دیگری برویم، جواب متفاوتی به دست خواهیم آورد.

این تابع از موقعیت را باید $U(x, y, z)$ بنامیم و وقتی ما می‌خواهیم به نقطه‌ی به‌خصوصی چون ۲ با مختصات (x_2, y_2, z_2) اشاره کنیم، باید بنویسیم $U(2)$ ، به عنوان خلاصه‌ی $U(x_2, y_2, z_2)$. کار انجام شده در مسیر ۱ به نقطه‌ی P همچنین می‌تواند با مسیر دیگری روی انتگرال نوشته شود، در صورتی که تمام ds ها قرینه شوند. به عبارتی، کار انجام شده در مسیر ۱ به P برابر منفی کار انجام شده در مسیر ۱ به P می‌باشد:

$$\int_1^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^1 \mathbf{F} \cdot (-d\mathbf{s}) = - \int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

در نتیجه کار انجام شده در مسیر P به ۱ $-U(1)$ و در مسیر P به ۲ $-U(2)$ است. پس انتگرال از ۱ تا ۲ برابر است با $-U(2)$ به اضافه قرینه‌ی $-U(1)$ به عبارتی $+U(1) - U(2)$:

$$U(1) = - \int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad U(2) = - \int_P^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = U(1) - U(2). \quad (۱.۱۴)$$

مقدار $U(1) - U(2)$ ، تغییر انرژی پتانسیل نامیده می‌شود و U را انرژی پتانسیل می‌نامیم. باید بگوییم که وقتی جرم در موقعیت ۲ قرار گرفته است، دارای انرژی پتانسیل $U(2)$ است و وقتی در موقعیت ۱ قرار دارد، انرژی پتانسیل $U(1)$. در صورتی هم که در موقعیت P قرار داشته باشد، انرژی پتانسیلش صفر است. اگر ما از نقطه‌ی دیگری به جای P استفاده می‌کردیم، مثلاً Q ، مشخص می‌شد که انرژی پتانسیل تنها با اضافه شدن یک ثابت تغییر می‌کرد (این را خودتان نشان دهید). از آنجایی که پایداری انرژی تنها به تغییرات وابسته است، فرقی نمی‌کند اگر ما ثابتی را هم به انرژی پتانسیل اضافه کنیم. در نتیجه نقطه‌ی P دلخواه است.

اکنون ما دو گزاره‌ی پیش رو را داریم: (۱) اینکه کار انجام شده بر اثر یک نیرو برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره؛ از طرفی (۲) بر اساس ریاضیات، برای نیروی پایستار، کار انجام شده برابر است با منفی

فصل ۱۴. کار و انرژی پتانسیل (جمع بندی)

تغییرات تابع U که آن را انرژی پتانسیل می نامیم. برآیند این دو ما را به این گزاره می رساند که اگر فقط نیروهای پایستار داشته باشیم، اندازهی انرژی جنبشی T به علاوهی انرژی پتانسیل U ، ثابت باقی می ماند:

$$T + U = \text{ثابت} \quad (۲.۱۴)$$

حال بیایید دربارهی فرمول های انرژی پتانسیل بحث کنیم برای تعدادی وضعیت خاص. اگر میدان گرانشی یکنواخت داشته باشیم و نخواهیم به ارتفاعاتی برویم که قابل مقایسه با شعاع زمین باشند، در این صورت نیرویی که داریم، یک نیروی عمودی با مقدار ثابت است و کار انجام شده به سادگی برابر است با نیرو ضرب در جابه جایی عمودی. پس:

$$U(z) = mgz, \quad (۳.۱۴)$$

و نقطهی P که متعلق به انرژی پتانسیل صفر است، می تواند هر نقطه ای در صفحهی $z = 0$ باشد. همچنین اگر می خواستیم، می توانستیم بگوییم انرژی پتانسیل هست $mg(z - 6)$ ؛ البته در آن صورت هم نتایج مشابهی به دست می آوریم تنها با این تفاوت که مقدار انرژی پتانسیل در $z = 0$ باید $mg6$ می بود. باز هم هیچ فرقی نمی کند؛ چرا که تنها تغییرات انرژی پتانسیل محاسبه می شود. انرژی لازم برای فشردن یک فنر طولی به فاصلهی x از نقطهی تعادل برابر است با:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (۴.۱۴)$$

و صفر انرژی پتانسیل در نقطهی $x = 0$ ، حالت تعادل فنر قرار دارد. اینجا هم می توانیم هر مقدار ثابت دلخواهی اضافه کنیم.

انرژی پتانسیل گرانشی دو جرم نقطه ای M و m به فاصلهی r از هم برابر است با:

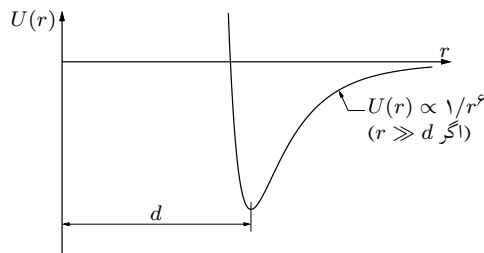
$$U(r) = -GMm/r. \quad (۵.۱۴)$$

در اینجا مقدار ثابت طوری انتخاب شده که پتانسیل در بی نهایت صفر شود. البته فرمول مشابهی هم برای بارهای الکتریکی به کار می رود، زیرا قانون اینجا هم همان است:

$$U(r) = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r. \quad (۶.۱۴)$$

حال بیایید واقعاً یکی از این فرمول ها را استفاده کنیم تا ببینیم آیا معنی آن را متوجه شده ایم. سوال: با چه سرعتی باید یک موشک را از زمین به فضا پرتاب کنیم تا دیگر برنگردد؟ جواب: مجموع انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی باید ثابت باشد؛ وقتی موشک زمین را ترک می کند، میلیون ها مایل دورتر خواهد بود و وقتی در آستانهی ترک زمین قرار دارد، می توانیم فرض کنیم که آنجا با سرعت صفر در حرکت است. a را شعاع زمین بگیریم و M را جرم آن. مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل اولیه می شود $\frac{1}{2}mv^2 - GmM/a$. در پایان حرکت، دو انرژی باید با هم برابر باشند. در پایان حرکت انرژی جنبشی صفر در نظر گرفته می شود زیرا قید کردیم که تنها به آهستگی و اساساً با سرعت صفر دور شود، و انرژی پتانسیل هم هست GmM تقسیم بر بی نهایت، که صفر می شود. پس در یک طرف معادله همه چیز صفر است و این به ما می گوید که مربع سرعت باید برابر باشد با $2GM/a$. و اما GM/a^2 یا g همان چیز است که آن را شتاب گرانشی می نامیم. در نتیجه:

$$v^2 = 2ga.$$



شکل ۳.۱۴: انرژی پتانسیل بین دو اتم به عنوان تابعی از فاصله بین آنها.

یک ماهواره باید چه سرعتی داشته باشد تا حرکت چرخشی به دور زمین را حفظ کند؟ خیلی وقت پیش روی این مسئله کار کردیم و $v^2 = GM/a$ را به دست آوردیم. در نتیجه برای فرار از زمین ما به $\sqrt{2}$ برابر سرعت لازم برای صرفاً چرخش به دور زمین (نزدیک سطح زمین) نیاز داریم. به عبارتی برای فرار از زمین به دو برابر (چون انرژی با مربع سرعت زیاد می شود) انرژی لازم برای چرخش به دور آن، نیاز داریم. در نتیجه از نظر تاریخی کار اولی که روی ماهواره ها انجام شد، این بود که یکی را برای گردش به دور زمین فرستادند، که به سرعت ۵ مایل بر ثانیه نیاز دارد. کار دوم این بود که ماهواره ای را برای همیشه از زمین خارج کنند که این کار به انرژی دو برابر و یا سرعتی حدود ۷ مایل بر ثانیه نیاز داشت.

حال بحثمان را درباره ی ویژگی های انرژی پتانسیل ادامه می دهیم؛ بیاید فعل و انفعالات دو مولکول یا دو اتم، دو اتم هیدروژن برای مثال را در نظر بگیریم. وقتی آن دو خیلی از هم دور باشند، نیروی بینشان از نوع جاذبه است که با عکس فاصله به توان هفت تغییر می کند، و وقتی خیلی به هم نزدیک باشند، نیروی بینشان یک دافعه ی بسیار بزرگ است. اگر ما برای به دست آوردن کار انجام شده، از معکوس فاصله به توان هفت انتگرال بگیریم، می بینیم که انرژی پتانسیل U ، که تابعی از فاصله ی شعاعی بین دو اتم هیدروژن است. با معکوس فاصله به توان شش تغییر می کند، البته برای فاصله های زیاد.

اگر ما مثل شکل ۳.۱۴ منحنی انرژی پتانسیل $U(r)$ را رسم کنیم، باید از یک r بزرگ به همراه معکوس آن به توان شش شروع کنیم؛ اما اگر به اندازه ی کافی نزدیک شویم، به نقطه ی d برمی خوریم که در آنجا انرژی پتانسیل کمینه است. کمینه بودن انرژی پتانسیل در $r = d$ این معنا را می دهد: اگر ما از d شروع کنیم و فاصله ی کمی را طی کنیم، یک فاصله ی خیلی کوتاه، کار انجام شده که برابر است با تغییرات انرژی پتانسیل در طی این مسافت، تقریباً صفر می شود؛ چراکه تغییرات انرژی پتانسیل در قعر منحنی ناچیز است. پس در این نقطه هیچ نیرویی وجود ندارد و در نتیجه نقطه ی تعادل است. راه دیگر برای نشان دادن اینکه این نقطه نقطه ی تعادل است، این است که برای خارج شدن از d در هر یک از دو جهت، باید کار انجام شود. وقتی که دو اتم اکسیژن ساکن شده اند، پس دیگر هیچ انرژی ای نمی تواند توسط نیروی بین آن دو آزاد شود؛ آن دو در پایین ترین سطح انرژی قرار گرفته اند و در همین فاصله ی d خواهند بود. این حالتی است که یک مولکول اکسیژن وقتی سرد است، به نظر می رسد. وقتی آن را گرم می کنیم، اتم ها لغزش می کنند و از هم دورتر می شوند و ما در واقع می توانیم آنها را از هم جدا کنیم، اما برای این کار به مقدار مشخصی کار یا انرژی نیاز است، که همان تفاوت انرژی پتانسیل بین $r = \infty$ و $r = d$ می باشد. زمانی که سعی می کنیم اتم ها را به صورت فشرده به هم نزدیک کنیم، انرژی به سرعت افزایش پیدا می کند زیرا آن دو یکدیگر را دفع می کنند.

دلیل بیان این نکته این است که ایده ی نیرو، برای مکانیک کوانتومی منحصراً مناسب نیست؛ آنجا ایده ی

فصل ۱۴. کار و انرژی پتانسیل (جمع‌بندی)

انرژی طبیعی‌تر است. می‌بینیم که گرچه وقتی نیروهای پیشرفته‌تری بین مواد هسته‌ای و مولکول‌ها و امثالهم را در نظر می‌گیریم، نیروها و سرعت‌ها ناچیز و ناپدید می‌شوند؛ اما مفهوم انرژی باقی می‌ماند. برای همین است که منحنی‌های انرژی پتانسیل را در کتاب‌های مکانیک کوانتومی پیدا می‌کنیم اما به ندرت یک منحنی برای نیروی بین دو مولکول می‌بینیم، زیرا در آن زمان کسانی که دارند بررسی‌هایی انجام می‌دهند، بیشتر به روابط انرژی فکر می‌کنند تا نیرو.

در ادامه اشاره می‌کنیم که اگر چندین نیروی پایستار همزمان روی یک جسم اثر کنند، انرژی پتانسیل جسم برابر است با مجموع انرژی‌های پتانسیل ناشی از هرکدام از نیروها. این همان قضیه‌ایست که پیشتر به آن اشاره کردیم، زیرا اگر نیرو بتواند به عنوان جمع برداری چند نیرو نشان داده شود، پس کار انجام شده بر اثر کل نیرو برابر است با مجموع کارهای انجام شده بر اثر نیروهای جزئی، و در نتیجه می‌تواند به عنوان تغییرات انرژی‌های پتانسیل هر یک از آنها به صورت جداگانه بررسی شود. پس انرژی پتانسیل نهایی برابر است با مجموع همه بخش‌های کوچک.

ما می‌توانیم این مسئله را تعمیم دهیم به حالت سیستمی از چند جرم که با یکدیگر در تعامل اند، مانند مشتری، زحل، اورانوس و غیره؛ یا اکسیژن، نیتروژن، کربن و غیره؛ که به ترتیب و دو به دو اثراتی ناشی از نیروهایی که همگی پایستار هستند، روی یکدیگر می‌گذارند. در این حالات، انرژی جنبشی کل سیستم به سادگی برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی همه‌ی اتم‌ها یا سیارات به خصوص و انرژی پتانسیل سیستم برابر است با جمع انرژی پتانسیل ناشی از تعامل مشترک بین هر جفت از ذرات در حالتی که بقیه آنجا نبودند، روی تمام جفت ذرات. (در واقع این حرف برای نیروهای مولکولی درست نیست و فرمول آن کمی پیچیده‌تر است؛ اما برای گرانش نیوتنی و تقریب نیروهای مولکولی درست است. در مورد نیروهای مولکولی یک انرژی پتانسیل وجود دارد که گاهی اوقات تابع پیچیده‌تری از موقعیت اتم‌ها می‌شود، تا اینکه به سادگی مجموع روابط جفت اتم‌ها باشد.) در حالت خاص گرانش، انرژی پتانسیل برابر است با جمع $-Gm_i m_j / r_{ij}$ روی تمام جفت i و j ؛ همانطور که در معادله‌ی (۱۴.۱۳) نشان داده شد. معادله‌ی (۱۴.۱۳) گزاره‌ی پیش رو را به زبان ریاضی بیان کرد: اینکه انرژی جنبشی کل به علاوه‌ی انرژی پتانسیل کل با زمان تغییر نمی‌کند. با اینکه سیاره‌های مختلف می‌چرخند، یا پیچ و تاب می‌خورند و امثالهم، اگر انرژی جنبشی کل و انرژی پتانسیل کل را محاسبه کنیم، می‌بینیم که کل آن ثابت باقی می‌ماند.

۴.۱۴ نیروهای ناپایستار

تا اینجا وقت قابل توجهی را صرف بررسی نیروهای پایستار کردیم؛ نیروهای ناپایستار چطور؟ ما باید نگاه نسبتاً عمیق‌تری به این مسئله بیندازیم و نشان دهیم که اصلاً نیروی ناپایستار وجود ندارد! در واقع همه‌ی نیروهای بنیادی در طبیعت، پایستار به نظر می‌رسند. این واقعیت پیامد قوانین نیوتن نیست. در واقع تا آنجایی که خود نیوتن می‌دانست، نیروها می‌توانند ناپایستار باشند، مثل اصطکاک که ظاهراً هست. وقتی می‌گوییم اصطکاک ظاهراً ناپایستار است، داریم از دید جدید به آن نگاه می‌کنیم که در این حوزه پی برده شده که همه قوانین عمیق، قوانین بین ذرات در بنیادی‌ترین سطح، پایستار هستند.

برای مثال اگر سیستمی را بررسی کنیم، شبیه به آن خوشه‌ی کروی ستاره‌ای که تصویری از آن را دیدیم که هزاران ستاره را دربرداشت و همگی با هم انفعالاتی داشتند، فرمول انرژی پتانسیل کل را به سادگی برابر یک رابطه به علاوه‌ی رابطه‌ی دیگر و به همین منوال جمع روی هر یک جفت از ستارگان به دست می‌آوریم. و انرژی جنبشی برابر می‌شود با جمع انرژی‌های جنبشی تک تک ستارگان. اما خوشه‌ی کروی در کل در فضا

معلق هم می‌باشد و اگر ما به اندازه‌ی کافی از آن دور بودیم و جزئیات را نمی‌دیدیم، می‌توانستیم تصور کنیم که یک تک جرم است. بعد اگر نیروهایی به آن وارد می‌شدند، نهایتاً بعضی از آن نیروها می‌توانستند کل آن را پیش برانند و ما مرکز آن جرم را در حال حرکت می‌دیدیم. از طرفی دیگر احتمالاً بعضی از نیروها اصطلاحاً هدر می‌روند تا انرژی جنبشی یا پتانسیل ذرات درونی را افزایش دهند. برای مثال تصور کنید که بر اثر این نیروها کل خوشه منبسط شود و ذرات سریع‌تر حرکت کنند. کل انرژی مجموعه کلی واقعاً پایسته مانده است اما از دور و با بینایی محدودی که نمی‌تواند پیچیدگی حرکات درونی را ببیند، تنها به انرژی جنبشی حرکت کل جرم به عنوان یک ذره‌ی واحد فکر می‌کنیم و این طور به نظرمان می‌رسد که انرژی می‌تواند پایستار نباشد، اما این به دلیل عدم درک چستی چیز است که می‌بینیم. و نشان داده می‌شود که در واقع اگر به اندازه‌ی کافی دقیق و ریزبینانه بنگریم، مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی کل عالم یک ثابت می‌شود.

هنگامی که ما ماده را با بیشترین دقت در سطح اتمی مطالعه می‌کنیم، همیشه جدا کردن انرژی کل یک چیز به دو بخش انرژی پتانسیل و جنبشی کار راحتی نیست و همیشه هم چنین تقسیم‌بندی‌ای ضروری نیست. تقریباً همیشه این کار ممکن است، پس فرض کنیم که همواره ممکن است و جمع انرژی پتانسیل و جنبشی عالم ثابت است. پس کل مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی درون کل عالم ثابت است و اگر عالم بخشی از ماده‌ای ایزوله باشد، انرژی ثابت می‌ماند اگر هیچ نیروی خارجی‌ای وجود نداشته باشد. اما همانطور که دیدیم، مقداری از انرژی جنبشی و پتانسیل یک چیز می‌تواند درونی باشد؛ برای مثال حرکات مولکولی درونی به این معنا که ما متوجهشان نمی‌شویم. ما می‌دانیم که در یک لیوان آب همه چیز در حال لغزش و قل خوردن است، همه‌ی بخش‌ها همواره در حرکت‌اند، پس داخل آن انرژی جنبشی قابل توجهی وجود دارد که ما معمولاً اصلاً توجهی به آن نمی‌کنیم. ما متوجه حرکت اتم‌ها نمی‌شویم، حرکتی که گرما تولید می‌کند و در نتیجه آن را انرژی جنبشی نمی‌نامیم؛ اما گرما اساساً انرژی جنبشی است. انرژی پتانسیل درونی هم برای مثال می‌تواند به شکل انرژی شیمیایی باشد: هنگام سوزاندن گازوئیل انرژی آزاد می‌شود زیرا انرژی‌های پتانسیل اتم‌ها در چنیش جدید اتمی کمتر از چنیش قبلی است. اینکه با گرما به عنوان انرژی پتانسیل محض برخورد کنیم، قاعدتاً ممکن نیست؛ چون که مقدار کمی پتانسیل هم وارد ماجرا می‌شود و برعکس، برای انرژی شیمیایی هم همینطور است؛ در نتیجه ما هردو را کنار هم می‌گذاریم و می‌گوییم کل انرژی جنبشی و پتانسیل درون یک ماده، بخشی گرما، بخشی انرژی شیمیایی و غیره می‌باشد. به هر حال همه‌ی این شکل‌های مختلف انرژی درونی معمولاً به عنوان انرژی از بین رفته به معنای مذکور در بالا، در نظر گرفته می‌شوند؛ وقتی به مطالعه ترمودینامیک بپردازیم بحث روشن‌تر می‌شود.

به عنوان مثالی دیگر، وقتی اصطکاک داریم، درست نیست که تصور کنیم انرژی جنبشی از بین رفته است، اگرچه جرم در حال لغزیدن می‌ایستد و به نظر می‌رسد که انرژی جنبشی از بین رفته است. انرژی جنبشی از بین نرفته است بلکه اتم‌های درون ماده دارند با مقدار بیشتری انرژی جنبشی نسبت به قبل چنیش می‌کنند، و گرچه که ما نمی‌توانیم این را ببینیم، اما می‌توانیم با تعیین دما، آن را اندازه بگیریم. اگر انرژی گرمایی را نادیده بگیریم، قطعاً نظریه‌ی پایستگی انرژی غلط ظاهر خواهد شد.

وضعیت دیگری که در آن پایستگی انرژی غلط به نظر می‌رسد، زمانیست که ما تنها بخشی از سیستم را مطالعه کنیم. طبیعتاً اگر یک چیز در تعامل با چیز دیگری در خارج سیستم باشد و ما از به حساب آوردن آن انفعالات صرف نظر کنیم، نظریه‌ی پایستگی انرژی صحیح به نظر نخواهد رسید.

در فیزیک کلاسیک انرژی پتانسیل تنها گرانش و الکتریسیته را در بر می‌گرفت اما امروزه ما انرژی

هسته‌ای و انرژی‌های دیگری را هم داریم. برای مثال، نور در نظریه کلاسیک شکل جدیدی از انرژی را در بر می‌گرفت اما ما اگر بخواهیم، همچنین می‌توانیم تصور کنیم که انرژی نور همان انرژی جنبشی یک فوتون است و فرمول (۲۰.۱۴) همچنان درست باشد.

۵.۱۴ پتانسیل‌ها و میدان‌ها

حال باید چندی از ایده‌های مربوط به انرژی پتانسیل به همراه ایده‌ی یک میدان را بررسی کنیم. فرض کنید که دو جسم بزرگ A و B داریم و یک جسم سوم خیلی کوچک که تحت جاذبه‌ی آن دو با یک نیروی برآیند F قرار دارد. ما قبلاً در فصل ۱۲ اشاره کرده‌ایم که نیروی گرانشی وارد بر یک ذره را می‌توان به شکل ضرب جرم آن، m در بردار دیگری به نام C که تنها وابسته به مکان ذره است، نوشت:

$$F = mC.$$

پس می‌توانیم گرانش را به این طریق تحلیل کنیم که تصور کنیم بردار مشخصه‌ی C در هر موقعیت مکانی از فضا وجود دارد به‌طوری که روی جرمی که در آن مکان قرار می‌دهیم، اثر کند؛ اما طوری که چه جرمی آنجا وجود داشته باشد یا نداشته باشد که بخواهد روی آن اثر کند، همچنان خود C آنجا موجود باشد. C سه مؤلفه دارد و هریک از آن مؤلفه‌ها تابعی از (x, y, z) یا به عبارتی تابعی از مکان در فضا هستند. ما چنین چیزی را میدان می‌نامیم و می‌گوییم اجرام A و B این میدان را ایجاد می‌کنند یا به عبارتی بردار C را می‌سازند. وقتی یک جرم در یک میدان قرار می‌گیرد، نیروی وارد بر آن برابر می‌شود با جرم آن ضرب در اندازه‌ی بردار میدان در آن نقطه‌ای که جرم قرار گرفته است.

می‌توانیم همین کار را با انرژی پتانسیل هم انجام دهیم. از آنجایی که انرژی پتانسیل، انتگرال $\cdot ds$ (نیرو-) را می‌توان به عنوان حاصل ضرب m در انتگرال $\cdot ds$ (میدان-) نوشت، با کمی تغییر در مقیاس، می‌بینیم که انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ یک جرم واقع در نقطه‌ی (x, y, z) در فضا را می‌توان به عنوان حاصل ضرب m در تابع دیگری که آن را پتانسیل Ψ می‌نامیم، نوشت. انتگرال $\int C \cdot ds = -\Psi$ درست مثل $\int F \cdot ds = -U$ است؛ بین آن دو تنها یک مقیاس‌گذاری وجود دارد:

$$U = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -m \int \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = m\Psi. \quad (۷.۱۴)$$

با داشتن تابع $\Psi(x, y, z)$ در هر نقطه از فضا، مستقیماً می‌توانیم انرژی پتانسیل یک جسم را در هر نقطه از فضا محاسبه کنیم، به عبارتی $U(x, y, z) = m\Psi(x, y, z)$ - کاری نسبتاً بدیهی به نظر می‌رسد. اما واقعاً بدیهی نیست چراکه گاهی اوقات بسیار زیباتر است که میدان را با مشخص کردن اندازه Ψ در هر کجای فضا توصیف کنیم، به جای اینکه مجبور باشیم C را مشخص کنیم. به جای اینکه مجبور باشیم سه مؤلفه‌ی پیچیده از یک تابع برداری را بنویسیم، می‌توانیم تابع عددی Ψ (اسکالر) را تعیین کنیم. به علاوه، وقتی چند جرم باعث تولید میدان می‌شوند، محاسبه‌ی Ψ بسیار ساده‌تر است از هر کدام از مؤلفه‌های C ، زیرا به‌خاطر نرده‌ای بودن پتانسیل، آنها را به‌راحتی و بدون نگرانی درباره‌ی جهتشان با هم جمع می‌کنیم. همچنین میدان C را به‌راحتی می‌توان از روی Ψ به‌دست‌آورد، به روشی که مختصراً خواهیم دید. جرم‌های نقطه‌ای m_1 ، m_2 و ... را در نقاط ۱، ۲ و ... در نظر بگیرید، ما می‌خواهیم بدانیم پتانسیل Ψ در یک نقطه‌ی دلخواه

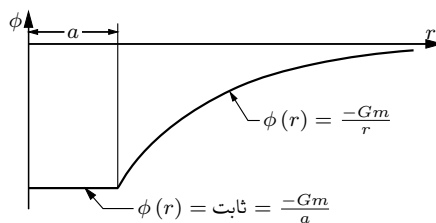
p چیست. به سادگی برابر است با مجموع پتانسیل‌ها در p ناشی از هرکدام از جرم‌ها به صورت جداگانه و تک‌تک:

$$\Psi(p) = \sum_i -\frac{Gm_i}{r_{ip}}, \quad i = \dots, 2, 1 \quad (8.14)$$

در فصل قبل ما از این فرمول، که پتانسیل برابر است با مجموع پتانسیل‌های تک‌تک انواع اجرام، استفاده کردیم برای اینکه پتانسیل ناشی از یک پوسته‌ی کروی را محاسبه کنیم. به این روش که پتانسیل ناشی از هر جزء از پوسته را با هم جمع کنیم. نتیجه‌ی این محاسبه در شکل ۴.۱۴ به صورت گرافیکی نشان داده شده است. پتانسیل منفی است، در $r = \infty$ صفر می‌شود و با شیب $1/r$ تا شعاع a کاهش می‌یابد و درون پوسته هم ثابت است. بیرون پوسته، پتانسیل برابر است با Gm/r که m جرم پوسته است، این دقیقاً یکسان با وضعیتی است که همه‌ی جرم در مرکز کره قرار می‌گرفت. اما همه‌جا دقیقاً این دو حالت یکسان نیستند، چراکه درون پوسته پتانسیل برابر Gm/a به دست می‌آید که یک ثابت است! وقتی پتانسیل ثابت باشد، هیچ میدانی وجود ندارد؛ یا وقتی انرژی پتانسیل ثابت باشد، هیچ نیرویی وجود ندارد؛ زیرا اگر جرمی را از یک مکان به هر جایی دیگر درون کره حرکت دهیم، کار انجام شده توسط نیرو دقیقاً صفر می‌شود. چرا؟ زیرا کار انجام شده در حرکت جرم از یک مکان به مکانی دیگر برابر است با منفی تغییرات انرژی پتانسیل (یا اینکه انتگرال میدان مربوطه برابر است با تغییرات پتانسیل). اما انرژی پتانسیل در هر دو نقطه‌ی درونی، یکسان است پس تغییرات انرژی پتانسیل صفر است و در نتیجه هیچ کاری طی حرکت بین هر دو نقطه درون پوسته، انجام نمی‌شود. کار تنها در حالتی می‌تواند در هر جهت جابه‌جایی صفر باشد که اصلاً هیچ نیرویی وجود نداشته باشد.

این به ما نشان می‌دهد که چگونه می‌توانیم نیرو یا میدان را از روی انرژی پتانسیل به دست آوریم. فرض کنیم که انرژی پتانسیل یک جرم در نقطه‌ی (x, y, z) معلوم باشد و ما بخواهیم بدانیم چه نیرویی به جسم وارد می‌شود. اینکه پتانسیل را تنها در همین نقطه بدانیم، کافی نیست. خواهیم دید که به اطلاعاتی درباره‌ی پتانسیل در همسایگی نقاط هم نیاز هست. چرا؟ ما چگونه می‌توانیم مؤلفه‌ی x نیرو را به دست آوریم؟ (اگر بتوانیم این کار را بکنیم، حتماً می‌توانیم مؤلفه‌های y و z را هم به دست آوریم و آنگاه نیرو را کاملاً می‌شناسیم.) حال اگر می‌خواستیم جسم را به اندازه‌ی جابه‌جایی کوچک Δx حرکت دهیم، کار انجام شده توسط نیرو روی جسم برابر می‌بود با مؤلفه‌ی x نیرو ضرب در Δx ، و اگر Δx به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، باید برابر می‌شد با تغییر انرژی پتانسیل در حرکت از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر:

$$\Delta W = -\Delta U = F_x \Delta x. \quad (9.14)$$



شکل ۴.۱۴: پتانسیل ناشی از پوسته‌ی کروی به شعاع a .

فصل ۱۴. کار و انرژی پتانسیل (جمع بندی)

ما صرفاً از فرمول $\int F \cdot ds = -\Delta U$ استفاده کرده ایم اما برای یک مسافت خیلی کوچک. حال آن را بر Δx تقسیم می کنیم تا نیرو را به دست آوریم:

$$F_x = -\Delta U / \Delta x. \quad (۱۰.۱۴)$$

البته این رابطه دقیق نیست. چیزی که ما واقعاً به دنبالش هستیم، حد (۱۰.۱۴) است زمانی که Δx کوچک و کوچک تر شود، چون این معادله تنها زمانی دقیقاً درست است که حد Δx بی نهایت کوچک باشد. این چیزی است که ما به عنوان مشتق U نسبت به x می شناسیم و در نتیجه مایلیم بنویسیم $-dU/dx$. اما U وابسته است به x ، y و z و ریاضی دانان نماد دیگری را ابداع کرده اند تا حواسمان باشد زمان مشتق گرفتن از چنین توابعی بسیار دقت کنیم و یادمان باشد که ما فرض می کنیم فقط x تغییر می کند و y و z تغییر نمی کنند. به جای d آنها "برعکس 6" یا ∂ را می سازند. (نماد ∂ بهتر بود از ابتدای محاسبات استفاده می شد زیرا ما همیشه می خواهیم d ها را با هم بزنیم اما هیچ وقت نمی خواهیم ∂ ها را بزنیم!) پس آنها می نویسند $\partial U / \partial x$ و در مواقع ضروری اگر بخواهند خیلی دقت به خرج دهند، یک خط و کنارش در پایین یک yz کوچک هم اضافه می کنند $(\partial U / \partial x)_{yz}$ ، به این معنی که «مشتق U نسبت به x را می گیرد و y و z را ثابت نگه می دارد». اکثر مواقع ما نماد مؤلفه های ثابت را به کار نمی بریم چون معمولاً از متن روشن می شود، پس ما عموماً از خط و y و z استفاده نمی کنیم. اگرچه همواره ∂ را به جای d به کار می بریم تا هشدار باشد که این مشتقی است که متغیرهای دیگرش ثابت گرفته شده اند. این را مشتق جزئی می نامیم، مشتقی است که تنها x را در آن تغییر می دهیم.

پس به این نتیجه می رسیم که نیرو در جهت x برابر است با منفی مشتق جزئی U نسبت به x :

$$F_x = -\partial U / \partial x. \quad (۱۱.۱۴)$$

طی فرایند مشابهی، نیرو در جهت y هم می تواند با مشتق گرفتن از U نسبت به y و ثابت نگه داشتن x و z ، به دست آید و البته مؤلفه ی سوم هم می شود مشتق نسبت به z وقتی y و x ثابت باشند:

$$F_y = -\partial U / \partial y, \quad F_z = -\partial U / \partial z. \quad (۱۲.۱۴)$$

به این ترتیب از انرژی پتانسیل به نیرو دست پیدا می کنیم. همچنین میدان را هم دقیقاً از همین راه از روی پتانسیل به دست می آوریم:

$$C_x = -\partial \Psi / \partial x, \quad C_y = -\partial \Psi / \partial y, \quad C_z = -\partial \Psi / \partial z. \quad (۱۳.۱۴)$$

اتفاقاً باید به نمادگذاری دیگری هم اینجا اشاره کنیم که در واقع فعلاً از آن استفاده نخواهیم کرد: وقتی C یک بردار باشد با مؤلفه های x ، y و z ، نمادگذاری های $\partial / \partial x$ ، $\partial / \partial y$ و $\partial / \partial z$ که مؤلفه های x ، y و z را تولید می کنند هم چیزی شبیه بردار هستند. ریاضی دانان نماد جدید و جالب ∇ را ابداع کرده اند که به آن گرادیان می گوئیم، گرادیان یک کمیت نیست بلکه یک عملگر است که یک اسکالر را به بردار تبدیل می کند. مؤلفه های آن به این صورت اند: مؤلفه ی x این گرادیان هست $\partial / \partial x$ ، مؤلفه ی y آن هست $\partial / \partial y$ و مؤلفه ی z آن هم هست $\partial / \partial z$ ، بعد می توانیم از نوشتن فرمول هایمان به این روش لذت ببریم:

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad \mathbf{C} = -\nabla \Psi. \quad (۱۴.۱۴)$$

استفاده از ∇ روش سریعی را ارائه می‌دهد که چک کنیم آیا یک معادله‌ی برداری واقعی داریم یا نه، اما در واقع معادله‌ی (۱۴.۱۴) دقیقاً هم معنی است با معادلات (۱۱.۱۴)، (۱۲.۱۴) و (۱۳.۱۴)؛ این تنها یک روش دیگر برای نوشتن آنهاست و چون ما نمی‌خواهیم هر بار سه معادله بنویسیم، به جایش تنها می‌نویسیم ∇U .

مثال دیگر از میدان و پتانسیل مربوط می‌شود به حوزه‌ی الکتریکی. در الکتریسیته نیروی وارد بر یک جسم ایستا برابر است با بار ضرب در میدان الکتریکی: $F = qE$. (به‌طور معمول البته مؤلفه‌ی x نیرو در یک مسئله‌ی الکتریکی یک قسمت دیگری هم دارد که به میدان مغناطیسی بستگی دارد از معادله‌ی (۱۱.۱۲) به‌راحتی می‌توان نشان داد که نیروی ناشی از میدان مغناطیسی وارد بر یک ذره همواره عمود است بر سرعت آن و همچنین میدان. از آنجایی که نیروی مغناطیسی روی یک بار در حرکت، عمود بر سرعت آن است، هیچ کاری توسط مغناطیس روی بار متحرک انجام نمی‌شود، چون حرکت بر نیرو عمود است. در نتیجه در سنجش تئوری‌های انرژی جنبشی در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌توانیم از تأثیر میدان مغناطیسی صرف نظر کنیم، چراکه انرژی جنبشی را تغییر نمی‌دهد). فرض می‌کنیم که تنها میدان الکتریکی وجود دارد. سپس می‌توانیم انرژی یا کار انجام شده را از همان روشی که برای گرانش استفاده کردیم، به دست آوریم و کمیت ϕ که منفی انتگرال $E \cdot ds$ (از یک نقطه‌ی ثابت دلخواه تا نقطه‌ای که می‌خواهیم محاسبات را انجام دهیم) است را محاسبه کنیم، انرژی پتانسیل در یک میدان الکتریکی هم برابر است با بار ضرب در کمیت ϕ :

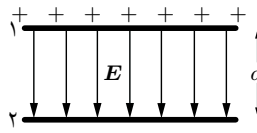
$$\phi(r) = - \int E \cdot ds,$$

$$U = q\phi.$$

برای مثال بیایید دو صفحه‌ی فلزی موازی را در نظر بگیریم که هر کدام دارای چگالی بار سطحی $\pm\sigma$ می‌باشند. به این می‌گوییم یک خازن تخت. قبلاً دیدیم که بیرون صفحات نیرو صفر است و میان آن دو میدان الکتریکی ثابتی وجود دارد که جهت آن از + به - و اندازه‌اش σ/ϵ_0 می‌باشد (شکل ۵.۱۴). ما می‌خواهیم بدانیم چه مقدار کار باید انجام شود تا یک بار را از یک صفحه به صفحه‌ی دیگر منتقل کند. کار باید باشد انتگرال $\cdot ds$ (نیرو) می‌توان آن را به‌صورت حاصل ضرب بار در مقدار پتانسیل در صفحه‌ی ۱ منهای آن در صفحه‌ی ۲ نوشت:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q(\phi_1 - \phi_2).$$

ما می‌توانیم این انتگرال را به دست آوریم زیرا نیرو ثابت است و اگر فاصله‌ی دو صفحه را d بنامیم، جواب



شکل ۵.۱۴: میدان بین صفحات موازی.

انتگرال ساده می شود:

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q\sigma}{\epsilon_0} \int_1^2 dx = \frac{q\sigma d}{\epsilon_0}.$$

اختلاف پتانسیل، $\Delta\phi = \sigma d/\epsilon_0$ را اختلاف ولتاژ می نامیم و ϕ را با ولت می سنجیم. وقتی می گوییم یک جفت صفحه با یک ولتاژ مشخصی باردار شده، منظورمان این است که تفاوت پتانسیل الکتریکی بین دو صفحه فلان مقدار ولت است. برای یک خازن ساخته شده از دو صفحه تخت که دارای چگالی بار سطحی $\pm\sigma$ می باشند، ولتاژ یا اختلاف پتانسیل دو صفحه برابر است با $\sigma d/\epsilon_0$.

Summary Lect 14 on Work & P.E.

Work done by force = $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$; if done on particle
the change of K.E. is Work done. $K.E. = \frac{1}{2}mv^2$

If force is such that $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{z}$ doesn't depend on path
Work done = $U(2) - U(1)$ where U is function called P.E.

In gravity, near earth $U = mgh$, far from earth $U = -\frac{GM_{\text{earth}}m}{r}$

Field outside sphere is same as if all mass is at center.

Electric field between two plates $\sigma = \text{charge/area}$ is σ/ϵ_0 . Force = qE